KU LEUVEN

Regeltechniek

Les 6: Het wortellijnendiagram

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen
ESAT – Departement Elektrotechniek
KU Leuven, Belgium

Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1:** Systeemtheorie
  - Les 1: Inleiding en modelvorming
  - Les 2: Signaaltransformaties
  - Les 3: Systemen van eerste orde
  - Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd
- **Deel 2:** Analoge regeltechniek
  - Les 5: De regelkring
  - Les 6: Het wortellijnendiagram
  - Les 7: De klassieke regelaars
  - Les 8: Voorbeelden en toepassingen
  - Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
  - Les 10: Speciale regelstructuren
  - Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

Les 6: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
  - Inleiding
  - Voorbeeld: analytische berekening polen
  - Constructieregels
  - Eigenschappen
- **Oefeningen** [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - voorbeeldoefening
  - oefeningen

Bijkomende referentie:

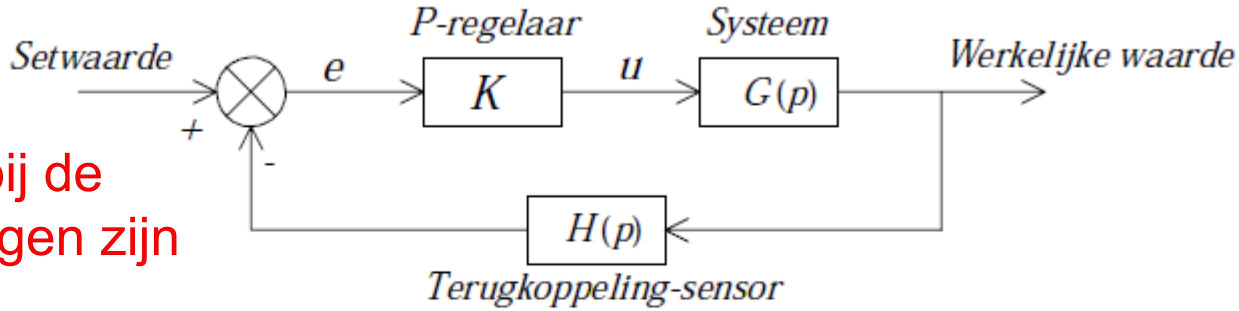
[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems*, 2005.

URL: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html

KU LEUVEN

Inleiding

- Transiënt gedrag:
  - bepaald door ligging polen van geslotenlussysteem (= wortels van karakteristieke vergelijking)
- Wortellijnenmethode = grafische procedure die verloop van polen van *geslotenlussysteem* i.f.v. versterkingsfactor *K* weergeeft
- Zelfde als stabiliteit van een P-regelaar bestuderen



Polen die dicht bij de imaginaire as liggen zijn belangrijk
(= dominante polen)

Les 6: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
  - Inleiding
  - Voorbeeld: analytische berekening polen
  - Constructieregels
  - Eigenschappen
- **Oefeningen** [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - voorbeeldoefening
  - oefeningen

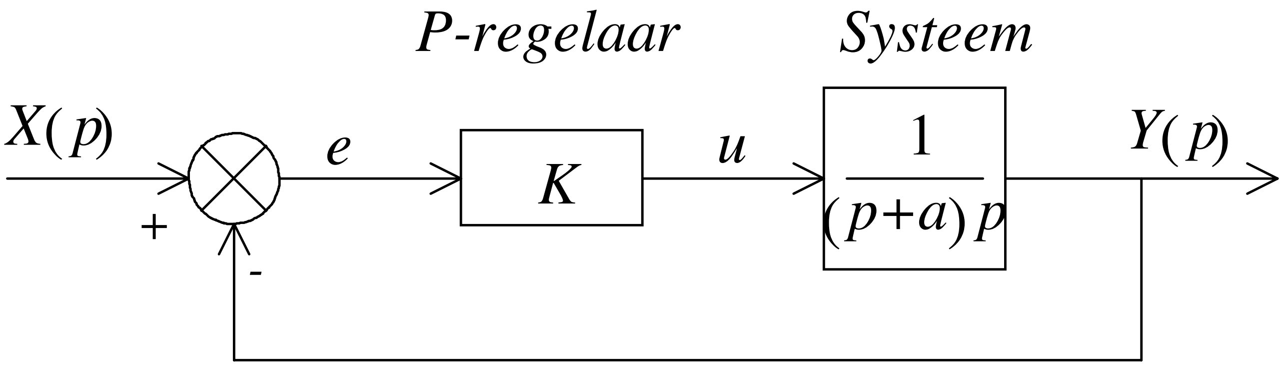
Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems*, 2005.

URL: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html

Voorbeeld: analytische berekening polen

- Concept: polen van geslotenlus TF berekenen en tekenen als functie van versterkingsfactor *K*
- Haalbaar voor 2e orde systemen, niet voor hogere orde !
- Voorbeeld: 2e orde systeem



$$G(p) = \frac{K}{p(p+a)} = \frac{T(p)}{N(p)} \quad \text{(openlus TF)}$$

$$p_1 = 0,\ p_2 = -a \quad \text{(openlus polen)}$$

Voorbeeld: analytische berekening polen

- Geslotenlus TF:

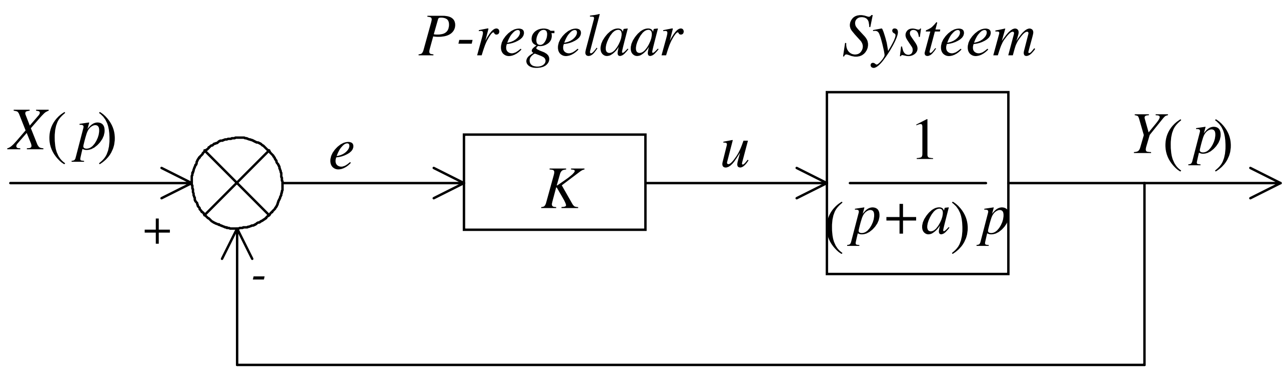
$$Q(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{p^2 + pa + K} = \frac{T(p)}{T(p) + N(p)}$$

- Karakteristieke vergelijking:

$$T(p) + N(p) = 0 \text{ of } p^2 + pa + K = 0$$

- Polen geslotenlussysteem = wortels karakteristieke vgl:

$$p_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K}$$



Voorbeeld: analytische berekening polen

- Wortellijnendiagram: *a* constant, $K = 0 \to \infty$

$$p_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K}$$

  - geval 1:

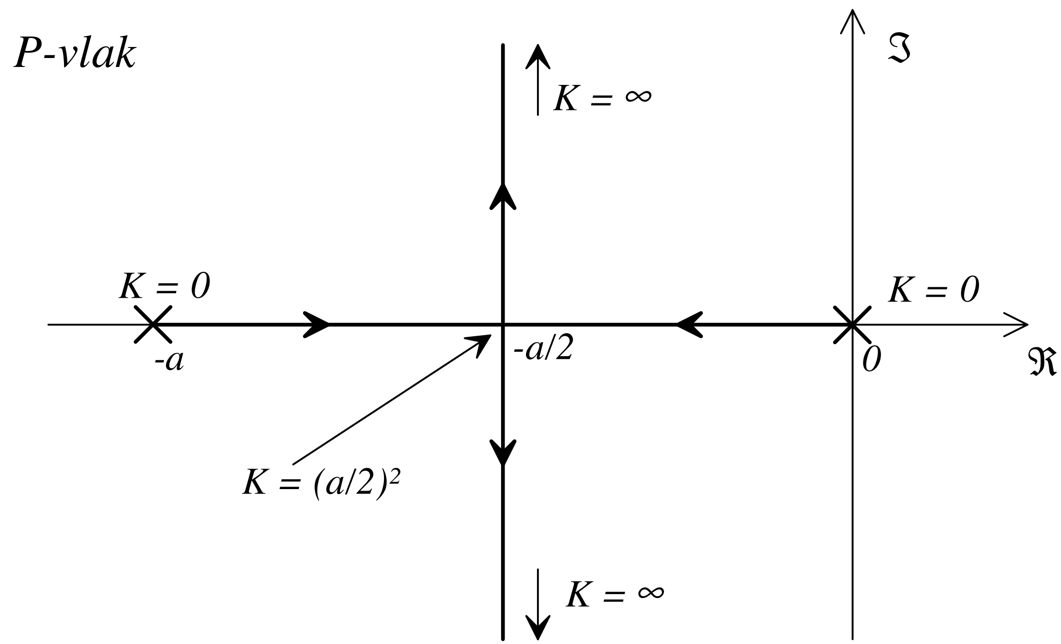
$$0 \leq K < \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

  - geval 2:

$$K = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

  - geval 3:

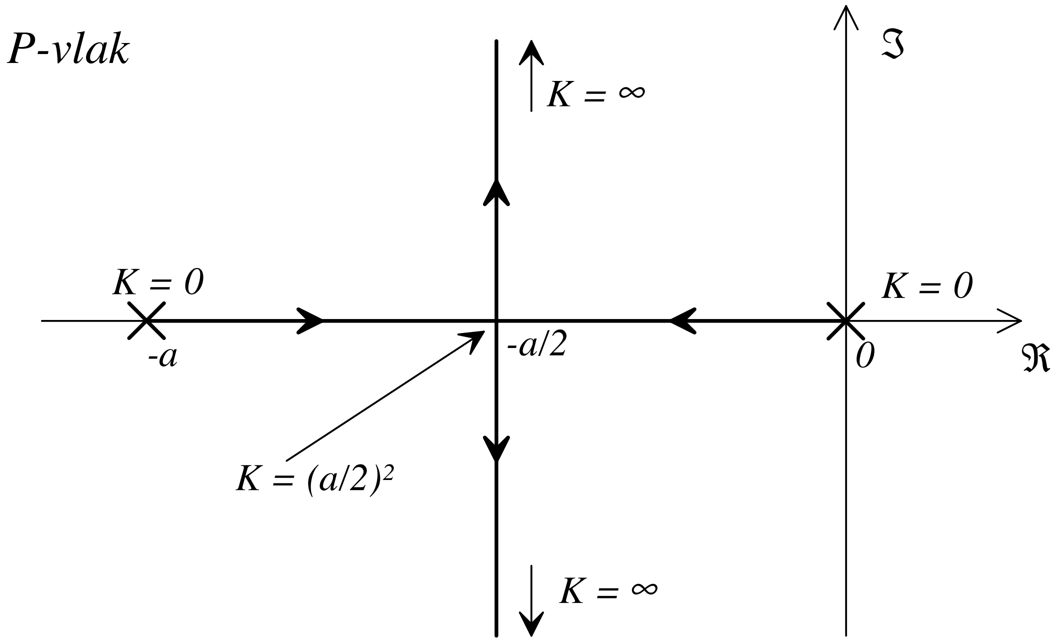
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 < K < \infty$$



KU LEUVEN

Voorbeeld: analytische berekening polen

- Wortellijnendiagram: conclusies?
  - geslotenlussysteem altijd absoluut stabiel
  - geslotenlussysteem relatief onstabiel bij hoge versterking



Les 6: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
  - Inleiding
  - Voorbeeld: analytische berekening polen
  - Constructieregels
  - Eigenschappen
- **Oefeningen** [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - voorbeeldoefening
  - oefeningen

Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems*, 2005.

URL: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html

Constructieregels: Concept

- Meest algemene vorm van karakteristieke vergelijking:

$$1 + G(p)H(p) = 0$$

- Hier is de openlus TF

$$G(p)H(p) = \frac{K_{RL}(p+z_1)(p+z_2)\dots(p+z_m)}{(p+p_1)(p+p_2)\dots(p+p_n)}$$

met z_i de nulpunten en p_j de polen van de open-lus TF

- Concept grafische methode: teken wortellijnendiagram op basis van openlus nulpunten en polen ipv op basis van geslotenluspolen (veel moeilijker te berekenen)

KU LEUVEN

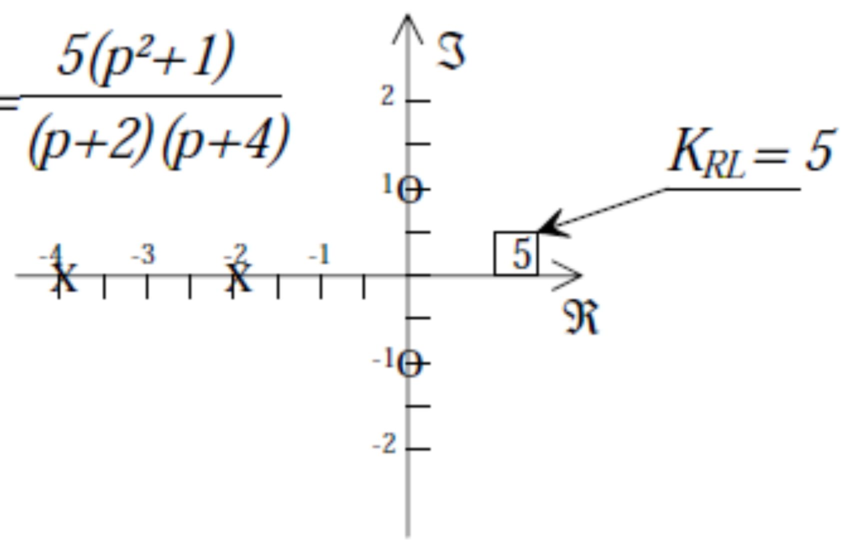
Constructieregels: Definities

- Vermenigvuldigingsfactor K_{RL} (RL-gain)
- Gelijkspanningsversterking K_D

$$K_D = \left| \frac{K_{RL} z_1 z_2 \ldots z_m}{p_1 p_2 \ldots p_n} \right|$$

- Voorbeeld:

$$GH = \frac{5(p^2+1)}{(p+2)(p+4)}$$



Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

- Karakteristieke vergelijking van systeem (met versterkingsfactor *K*):

$$1 + KG(p)H(p) = 0 \quad \text{of} \quad KG(p)H(p) = -1$$

- Hieruit kunnen we twee voorwaarden halen:
  - modulusvoorwaarde: $$K = \frac{1}{|G(p)H(p)|}$$
  - hoekvoorwaarde: $$\angle KG(p)H(p) = 180^\circ + k360^\circ$$

Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

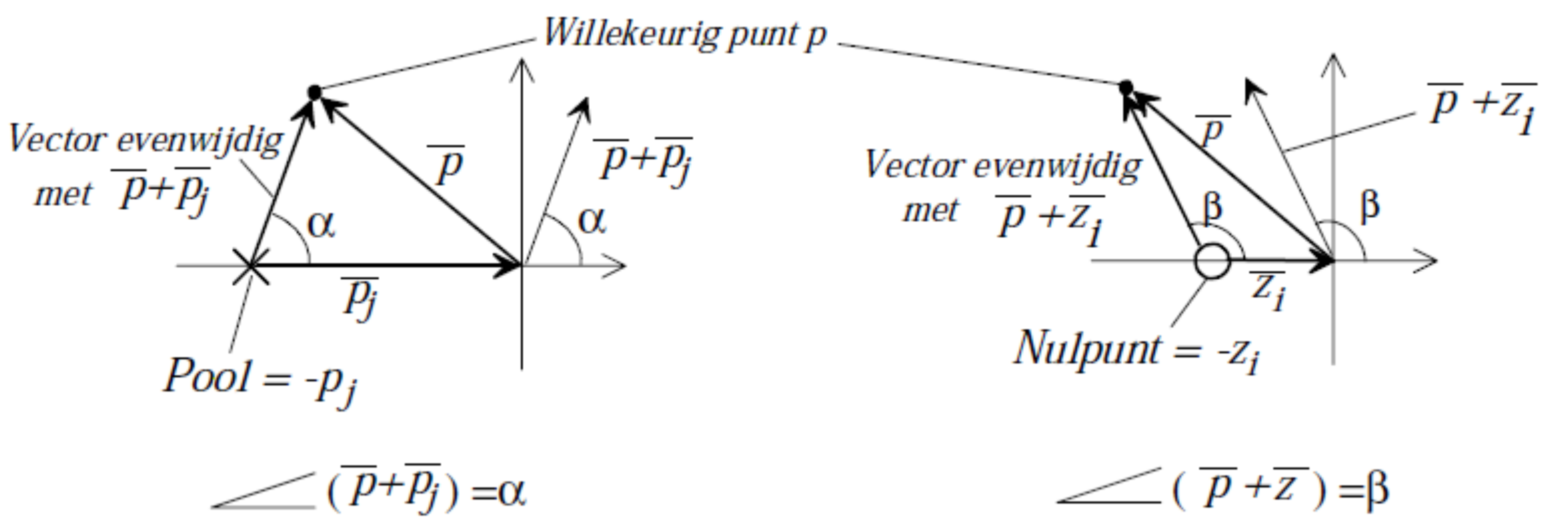
- We zoeken nu alle complexe getallen $p = \bar{p}e^{j\phi}$ die aan beide voorwaarden voldoen:
  - de hoekvoorwaarde heeft een oplossing *p* die voldoet aan:

$$
\begin{aligned}
180^\circ + k360^\circ &= \angle KG(p)H(p) \\
&= \angle G(p)H(p) \\
&= \angle \frac{K_{RL}(p+z_1)(p+z_2)\ldots(p+z_m)}{(p+p_1)(p+p_2)\ldots(p+p_n)} \\
&= \angle(p+z_1) + \angle(p+z_2) + \ldots + \angle(p+z_m) \\
&\quad -\angle(p+p_1) - \angle(p+p_2) - \ldots - \angle(p+p_n)
\end{aligned}
$$

  - deze oplossing kan grafisch bepaald worden (zie verder)
  - deze oplossing is onafhankelijk van de versterkingsfactor *K*

Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

- We zoeken nu alle complexe getallen $p = \bar{p}e^{j\phi}$ die aan beide voorwaarden voldoen:
  - de hoeken $\angle(p + z_i)$ en $\angle(p + p_j)$ tussen een willekeurig punt *p* en de nullen en polen van de openlus TF $G(p)H(p)$ kunnen grafisch bepaald worden:



Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

- We zoeken nu alle complexe getallen $p = \bar{p}e^{j\phi}$ die aan beide voorwaarden voldoen:
  - gegeven een oplossing *p* voor de hoekvoorwaarde, dan kan aan de modulusvoorwaarde altijd voldaan worden door een gepaste versterkingsfactor *K* te kiezen:

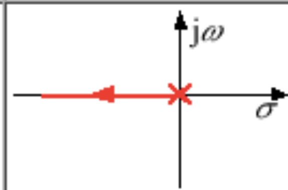
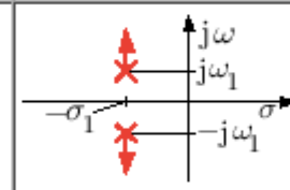
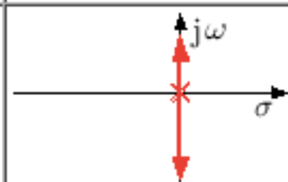
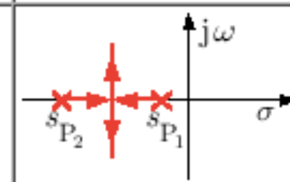
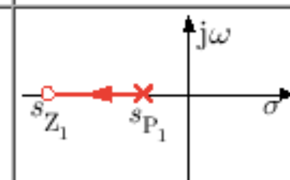
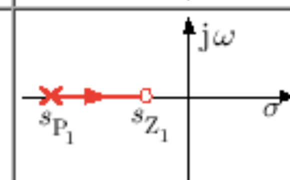
$$K = \frac{1}{|G(p)H(p)|}$$

Constructieregels: overzicht

- We overlopen nu een aantal eigenschappen en regels die het tekenen van een wortellijnendiagram vergemakkelijken:
  - aantal takken
  - beginpunten
  - eindpunten
  - takken op de reëele as
  - asymptotische richting
  - breekpunten bij samenvallende polen of nulpunten
  - hoek van vertrek

Constructieregels: aantal takken

- Het aantal takken van het wortellijnendiagram is gelijk aan het aantal polen van de openlus TF $G(p)H(p)$
- Voorbeelden:

$G_0(s)$	root locus	$G_0(s)$	root locus
$\frac{k_0}{s}$		$\frac{k_0}{(s+\sigma_1)^2+\omega_1^2}$	
$\frac{k_0}{s^2}$		$\frac{k_0}{(s-s_{P_1})(s-s_{P_2})}$	
$\frac{k_0}{s-s_{P_1}}$		$\frac{k_0(s-s_{Z_1})}{(s-s_{P_1})}$ $\lvert s_{Z_1}\rvert > \lvert s_{P_1}\rvert$	
$\frac{k_0}{s^2+\omega_1^2}$		$\frac{k_0(s-s_{Z_1})}{(s-s_{P_1})}$ $\lvert s_{Z_1}\rvert < \lvert s_{P_1}\rvert$	

Constructieregels: beginpunten

- De beginpunten van elke tak van het wortellijnendiagram worden bepaald door de polen van de geslotenlus TF bij een versterkingsfactor *K* = 0.
- In dit geval komen de polen van de geslotenlus TF overeen met de polen van de openlus TF.
- Modulusvoorwaarde: $K = 0 \quad \Rightarrow \quad |G(p)H(p)| = \infty$

$$\Rightarrow \quad p = \text{pool van } G(p)H(p)$$

- **Conclusie:** de beginpunten zijn de polen van de openlus TF $G(p)H(p)$

Constructieregels: eindpunten

- De eindpunten van elke tak van het wortellijnendiagram worden bepaald door de polen van de geslotenlus TF bij een versterkingsfactor *K* = ∞.
- In dit geval komen de polen van de geslotenlus TF overeen met de nulpunten van de openlus TF.
- Modulusvoorwaarde: $K = \infty \quad \Rightarrow \quad |G(p)H(p)| = 0$

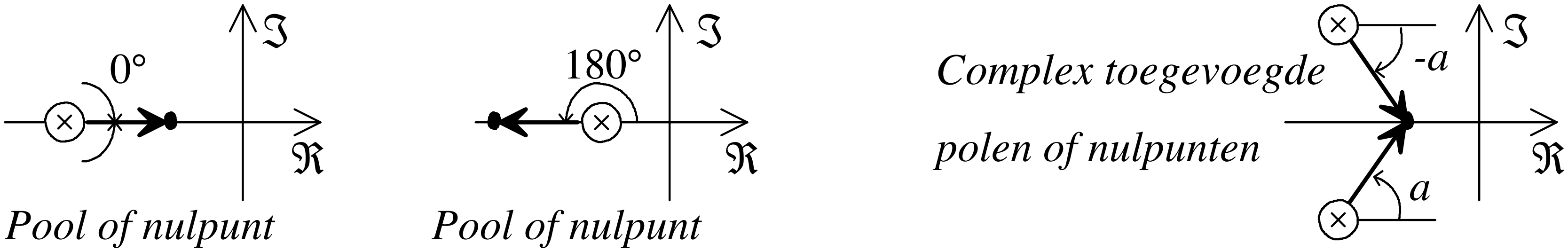
$$\Rightarrow \quad p = \text{nulpt van } G(p)H(p)$$

- Indien de openlus TF minder nulpunten (*m*) dan polen (*n*) heeft dan ligger er *n-m* eindpunten op oneindig.
- **Conclusie:**
  - de eindpunten zijn de nulpunten van de openlus TF $G(p)H(p)$
  - er zijn *n-m* asymptoten naar eindpunten op ∞

KU LEUVEN

Constructieregels: takken op de reële as

- Een punt *p* op de reële as maakt altijd een hoek van 0° of 180° met een reële pool of nulpunt van de openlus TF.
- Een punt *p* op de reële as maakt altijd tegengestelde hoeken van -*a*° en +*a*° met een complex paar polen of nulpunten van de openlus TF.



- **Conclusie:** alle punten op de reële as die links gelegen zijn van een oneven aantal nulpunten of polen van de openlus TF $G(p)H(p)$ behoren tot het wortellijnendiagram

Constructieregels: asymptotische richting

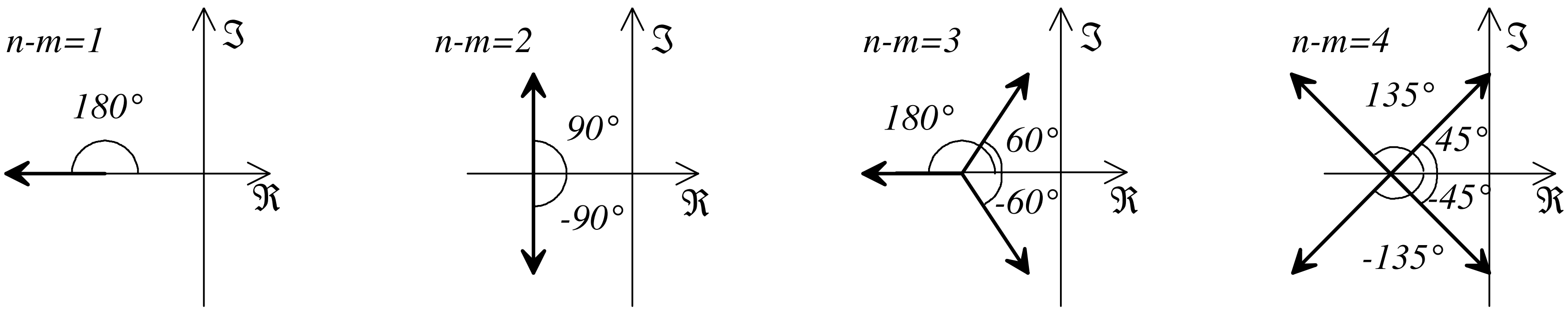
- Als openlus TF meer polen dan nulpunten heeft ($n > m$) dan lopen *n-m* takken naar oneindig met asymptotische richting:

$$\theta = \frac{180^\circ + k360^\circ}{n-m}$$

- De asymptoten snijden de reële as in het zwaartepunt van de polen en nulpunten van de openlus TF:

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

- Voorbeelden:

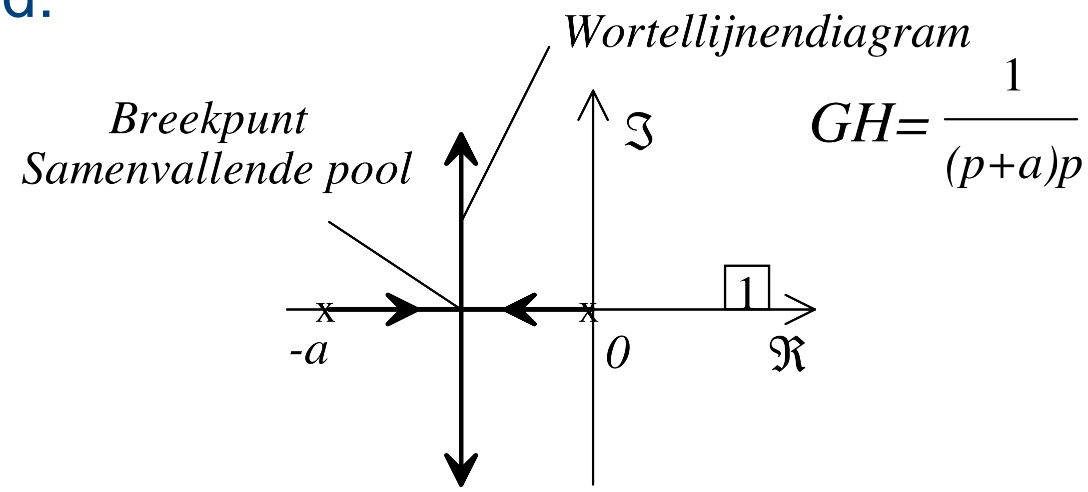


Constructieregels: breekpunten

- Wortellijnen verlaten of bereiken reële as altijd onder hoek van 90°.
- Het punt waar dit gebeurt is breakaway/entry point en komt overeen met dubbele pool van geslotenlus TF:

$$\frac{d}{dp}\left(1+G(p)H(p)\right)=\frac{d}{dp}\left(G(p)H(p)\right)=0$$

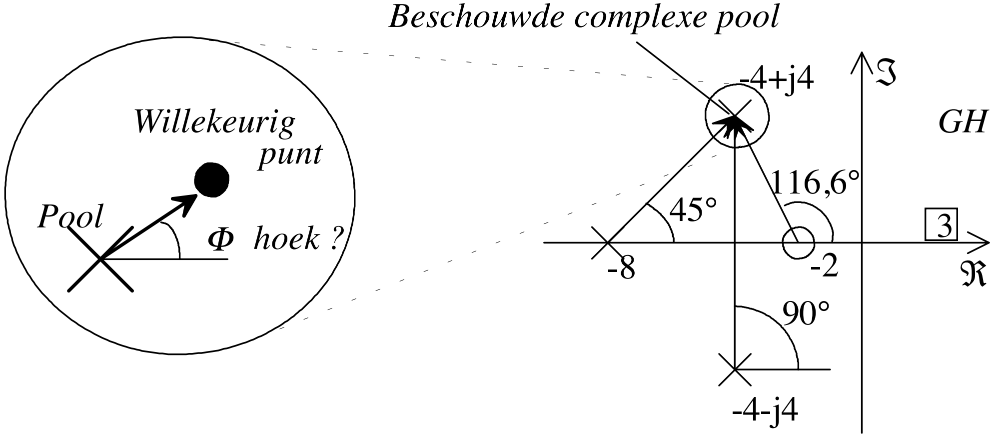
- Voorbeeld:



KU LEUVEN

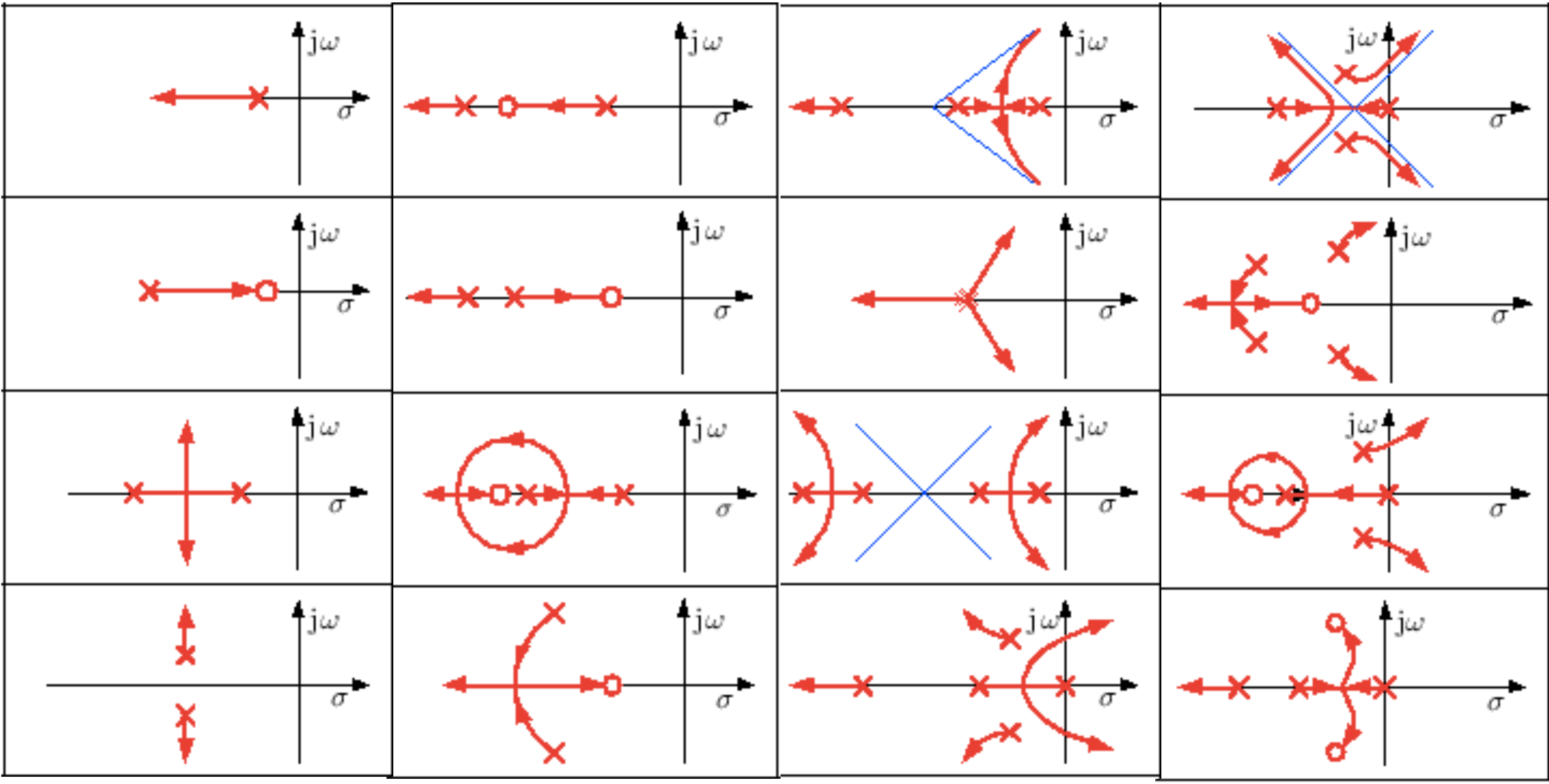
Constructieregels: hoek van vertrek

- Hoek Φ_l waarmee wortellijn vertrekt vanuit complex nulpunt z_l of pool p_l kan berekend worden uit hoekvoorwaarde:
  - nulpunt: $\Phi_l = 180° + k360° - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} \angle(z_i - z_l) + \sum_{j=1}^{n} \angle(p_j - z_l)$
  - pool: $\Phi_l = -180° - k360° + \sum_{i=1}^{m} \angle(z_i - p_l) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} \angle(p_j - p_l)$



$$GH = \frac{3(p+2)}{(p+8)(p^2+8p+32)}$$

Constructieregels: voorbeelden



Les 6: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
  - Inleiding
  - Voorbeeld: analytische berekening polen
  - Constructieregels
  - Eigenschappen
- **Oefeningen** [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - voorbeeldoefening
  - oefeningen

Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems*, 2005.

URL: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html

Eigenschappen

- Wat kunnen we leren uit het wortellijnendiagram?
  - absolute stabiliteit
  - relatieve stabiliteit
  - natuurlijke eigenpulsatie
  - gedempte eigenpulsatie
  - *settling time*

Eigenschappen: absolute stabiliteit

- Regelsysteem is absoluut stabiel voor versterkingsfactoren die overeenkomen met wortellijnen in linkerhalfvlak
- Marginale stabiliteit wordt bereikt wanneer wortellijnen imaginaire as snijden:

$$K_{rand\_stabiliteit} G(j\omega) H(j\omega) = -1$$

- Twee vergelijkingen in twee onbekenden: oplossing geeft versterkingsfactor $K(\omega)$ waarvoor regelsysteem marginaal stabiel is op frequentie ω

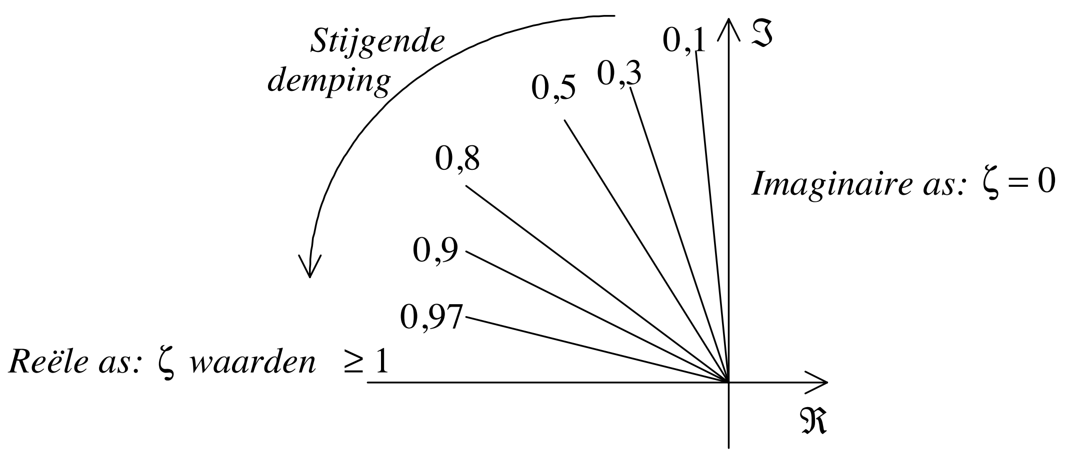
Eigenschappen: relatieve stabiliteit

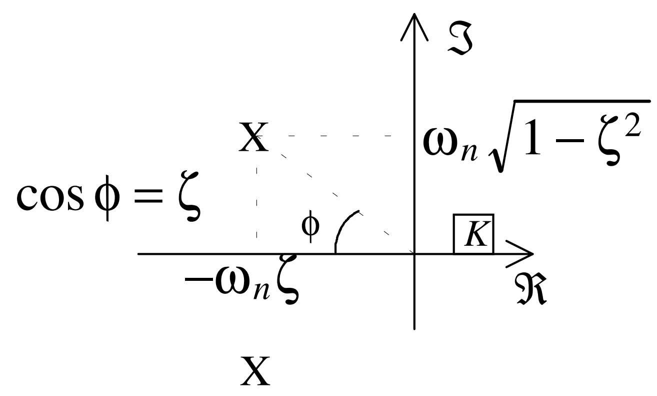
- Om relatieve stabiliteit te onderzoeken benaderen we regelsysteem door 2e orde systeem:

$$TF_{2eorde} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

- Relatieve stabiliteit en dempingsfactor worden dan bepaald door ligging van dominante polen:

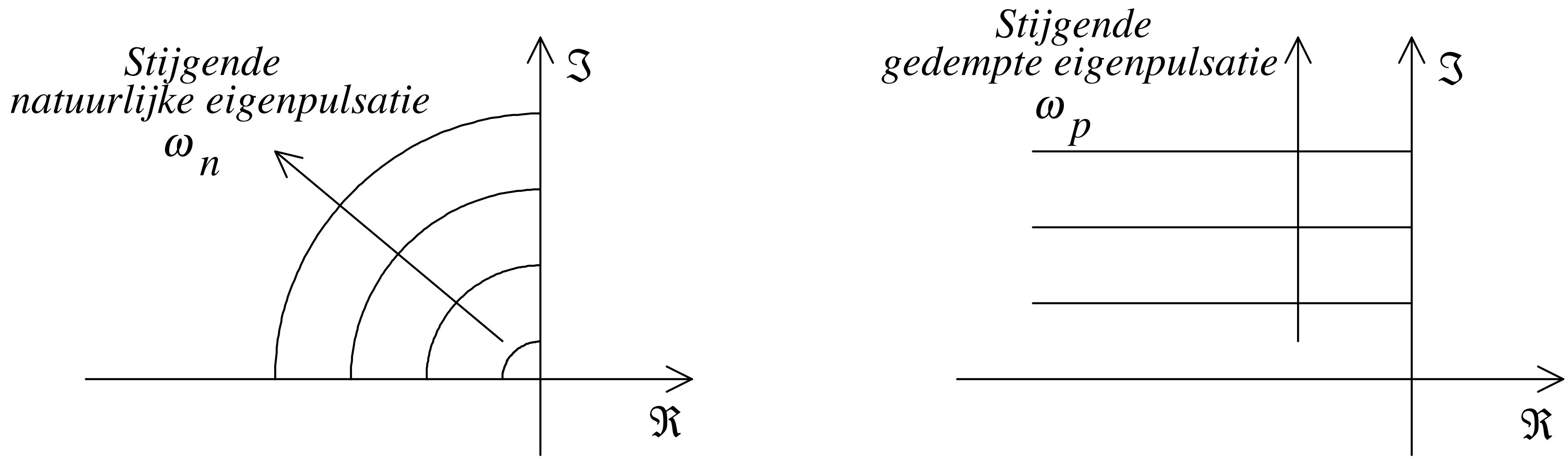
$$p_{1,2} = -\omega_n \left(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$





Eigenschappen: eigenpulsaties

- De natuurlijke eigenpulsatie is evenredig met de reactie-snelheid van het systeem
- De gedempte eigenpulsatie is imaginair deel van pool die oscillerend gedrag van overgangsverschijnsel weergeeft



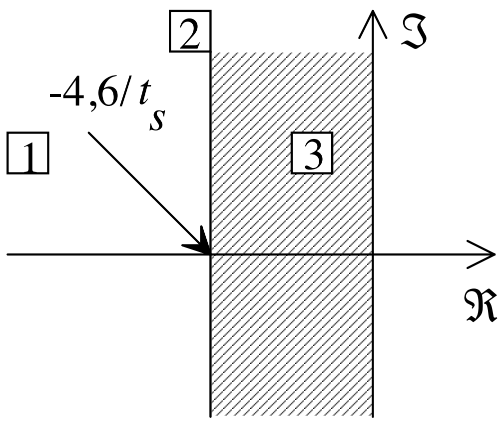
Eigenschappen: *Settling time*

- Reëele deel van pool geeft snelheid waarmee systeem naar eindwaarde gaat, bv. voor zuiver 1e orde systeem:

$$\frac{1}{p+a} \rightarrow e^{-at}$$

- *Settling time* bepaalt grens van ±1% rond eindwaarde:

$$0,01 = e^{-at_s} \Rightarrow t_s = -4,6/-a$$



1. *Gebied met polen met een een 'settling' tijd* $< t_s$

2. *Lijn met polen met een een 'settling' tijd* $= t_s$

3. *Gebied met polen met een een 'settling' tijd* $> t_s$

Les 6: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
  - Inleiding
  - Voorbeeld: analytische berekening polen
  - Constructieregels
  - Eigenschappen
- **Oefeningen** [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - voorbeeldoefening
  - oefeningen

Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, "The root-locus method," in *Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems*, 2005.

URL: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html

KU LEUVEN

Voorbeeldoefening

- Oefening B.1) [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - Opgave:

B.1) Teken het wortellijnendiagram van het volgende systeem:

$$KGH = \frac{K(p+1)(p-1)}{(p+2)(p+3)}$$

- Voor welke K-waarde ligt de pool van het gesloten systeem in nul?
- Voor welke K-waarden krijgen we samenvallende polen?

Voorbeeldoefening

- Oefening B.1) [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - Oplossing:

- nulpunten : 1, -1
- polen: -2, -3 n-m = 0 , dus geen asymptoten of polen op oneindig.

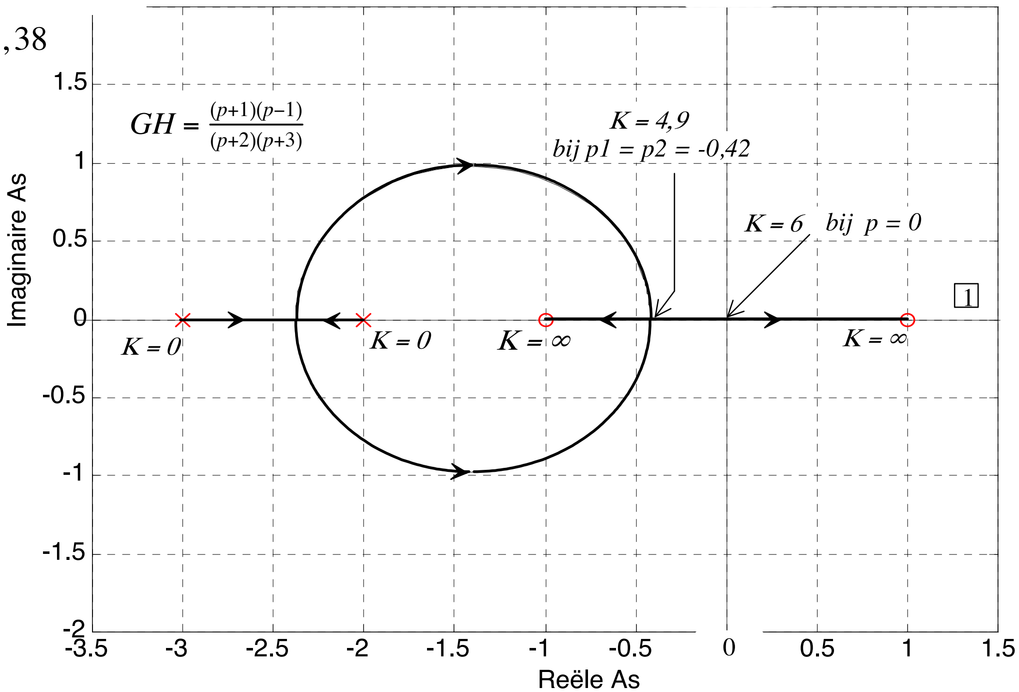
- Ligging van de samenvallende polen:

$$K = \frac{(p+2)(p+3)}{(p-1)(p+1)} \rightarrow \frac{dK}{dp} = \frac{(p^2-1)(2p+5)-(p^2+5p+6)(2p)}{(p^2-1)^2} = 0$$

$$\rightarrow 5p^2 + 14p + 5 = 0 \rightarrow \quad p_{1,2} = -0,42 \quad of \quad p_{1,2} = -2,38$$

- K-waarde voor $p = 0$:

$$1 + GH_{p=0} = 0 \rightarrow 1 + \frac{K(-1)(+1)}{(2)(3)} = 0 \rightarrow \quad K = 6$$



Les 6: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
  - Inleiding
  - Voorbeeld: analytische berekening polen
  - Constructieregels
  - Eigenschappen
- **Oefeningen** [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]
  - voorbeeldoefening
  - oefeningen

Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems*, 2005.

URL: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html

Oefeningen

- Oefening B.2) – 7)
  [Baeten, Regeltechniek Oefeningenbundel]