



Regeltechniek

Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen
ESAT – Departement Elektrotechniek
KU Leuven, Belgium



Regeltechniek: Tijdschema Hoorcolleges

- **Hoorcolleges: maandag 8:25 – 10:25**

- 29/09: Les 1
- 06/10: Les 2
- 13/10: Les 3
- 20/10: geen les
- 27/10: Les 4
- 03/11: Les 5
- 10/11: geen les
- 17/11: Les 6
- 24/11: Les 7
- 01/12: Les 8 & 10
- 08/12: Les 9
- 15/12: Les 11

Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**
 - Les 1: Inleiding en modelvorming
 - Les 2: Signaaltransformaties
 - Les 3: Systemen van eerste orde
 - Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd
- **Deel 2: Analoge regeltechniek**
 - Les 5: De regelkring
 - Les 6: Het wortellijnendiagram
 - Les 7: De klassieke regelaars
 - Les 8: Voorbeelden en toepassingen
 - Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
 - Les 10: Speciale regelstructuren
 - Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

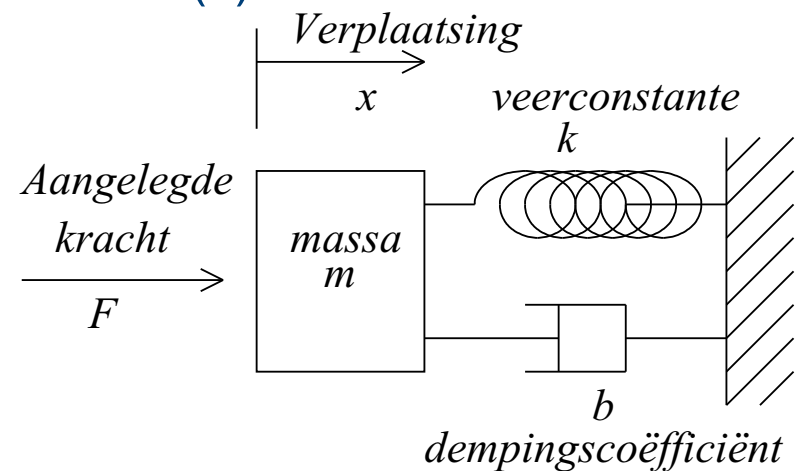
Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Inleidend voorbeeld (1)

- **Massa-veer-dempersysteem**

- typevoorbeeld tweede-orde mechanisch systeem
- komt zeer frequent voor in praktische toepassingen
- signalen:
 - ingangssignaal = aangelegde kracht (F)
 - uitgangssignaal = verplaatsing massa (x)
- systeempparameters:
 - massa m
 - veerconstante k
 - dempingscoëfficiënt b



Inleidend voorbeeld (2)

- **Massa-veer-dempersysteem**

- transfertfunctie volgt uit krachtenvergelijking:

wrijvingskracht \sim snelheid \leftarrow \rightarrow veerkracht \sim verplaatsing

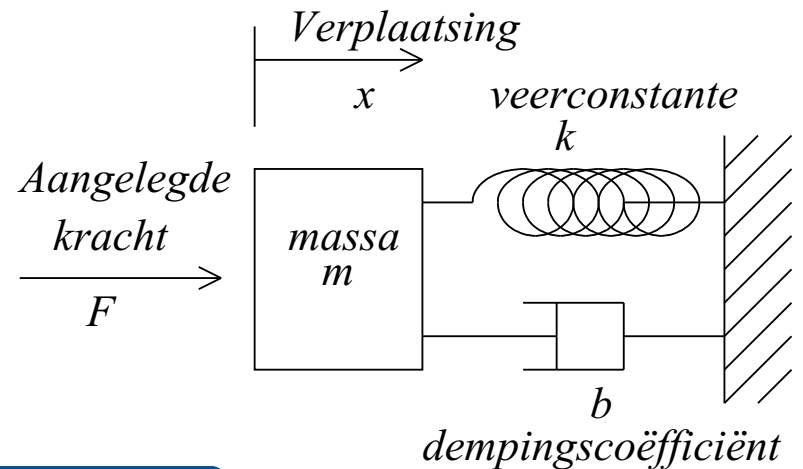
$$\begin{aligned} F(t) &= m.a(t) + F_f(t) + F_x(t) = m.a(t) + b.v(t) + k.x(t) \\ &= m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k.x(t) \quad . \end{aligned}$$

- Laplace-transformatie:

$$F(p) = (m.p^2 + b.p + k) X(p)$$

$$TF = \frac{X(p)}{F(p)} = \boxed{\frac{1}{m.p^2 + b.p + k}}$$

tweede orde



Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Transfertfunctie tweede orde systeem

- **Standaard tweede orde systeem**

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

- ω_n : natuurlijke eigenpulsatie
- ζ : dempingscoëfficiënt of dempingsfactor
- K : statische versterkingsfactor

- **Voorbeeld: massa-veer-dempersysteem**

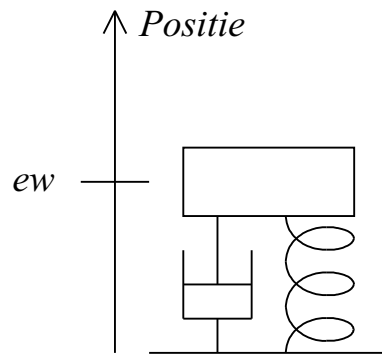
$$\frac{1}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad K = \frac{1}{k}$$

Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

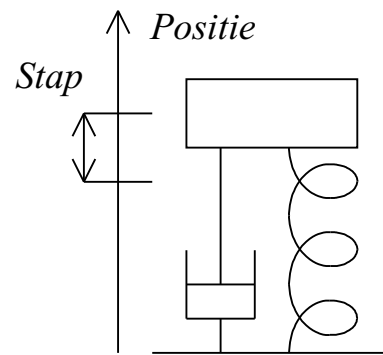
- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Staprespons tweede orde systeem (1)

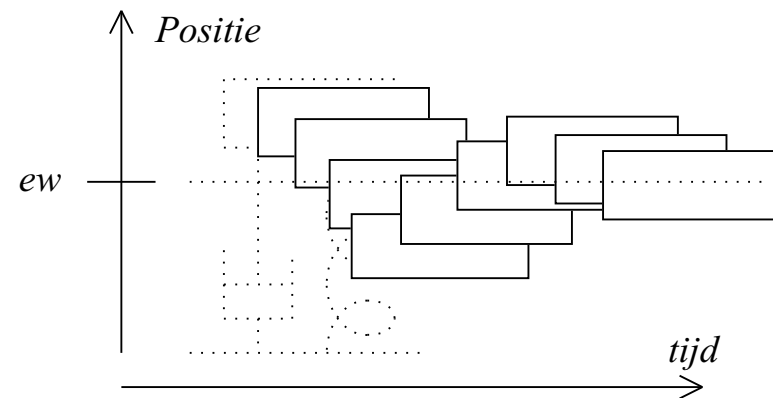
- **Voorbeeld: staprespons massa-veer-dempersysteem**



*Oorspronkelijk
systeem in evenwicht.*



*Uit evenwicht (ew)
brengen.*



*Plots loslaten en de beweging
opnemen i.f.v. de tijd.*

- **Staprespons: 3 gevallen**

- $\zeta > 1$: overgedempt systeem
- $\zeta = 1$: kritisch gedempt systeem
- $\zeta < 1$: ondergedempt (oscillerend) systeem

Staprespons tweede orde systeem (2)

- **Overgedempt systeem**

$$\zeta > 1$$

- er treedt geen oscillatie op in staprepons (damping te groot)
- staprespons:

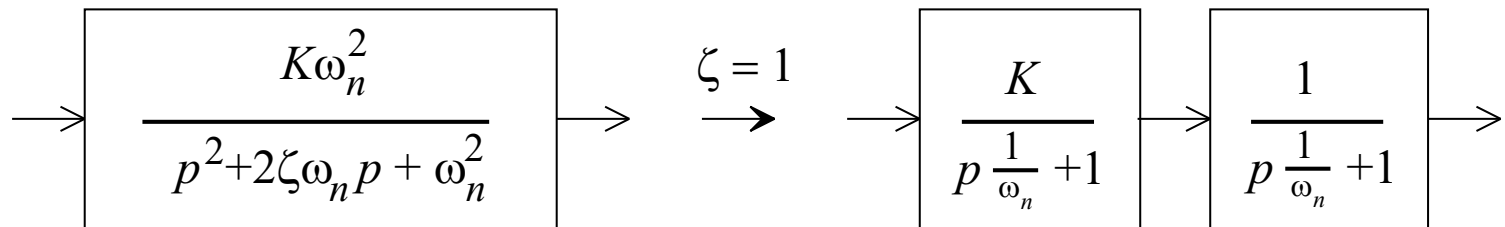
Staprespons $_{\zeta > 1} =$

$$K \left(1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n t (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n t (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right)$$

- twee exponentieel afnemende termen
- evenwichtswaarde = K
- twee reële polen: $P_{1,2} = -\omega_n \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$
- overgedempt tweede-orde systeem
= cascade van twee eerste-orde systemen

Staprespons tweede orde systeem (3)

- **Kritisch gedempt systeem** $\zeta = 1$
 - er treedt geen oscillatie of doorschot op in staprepons
 - snellere reactie dan overgedempt systeem
 - staprespons: $Staprespons_{\zeta=1} = K [1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}]$
 - één dubbele reële pool: $P_1 = P_2 = -\omega_n$
 - kritisch gedempt tweede-orde systeem
= cascade van twee eerste-orde systemen met gelijke polen



Staprespons tweede orde systeem (4)

- **Ondergedempt systeem**

$$\zeta < 1$$

- gedempte oscillatie
- staprespons:

$$Staprespons_{\zeta < 1} = K \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \text{bgtg} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right)$$

- gedempte sinus rond evenwichtswaarde K
- twee complex toegevoegde polen:

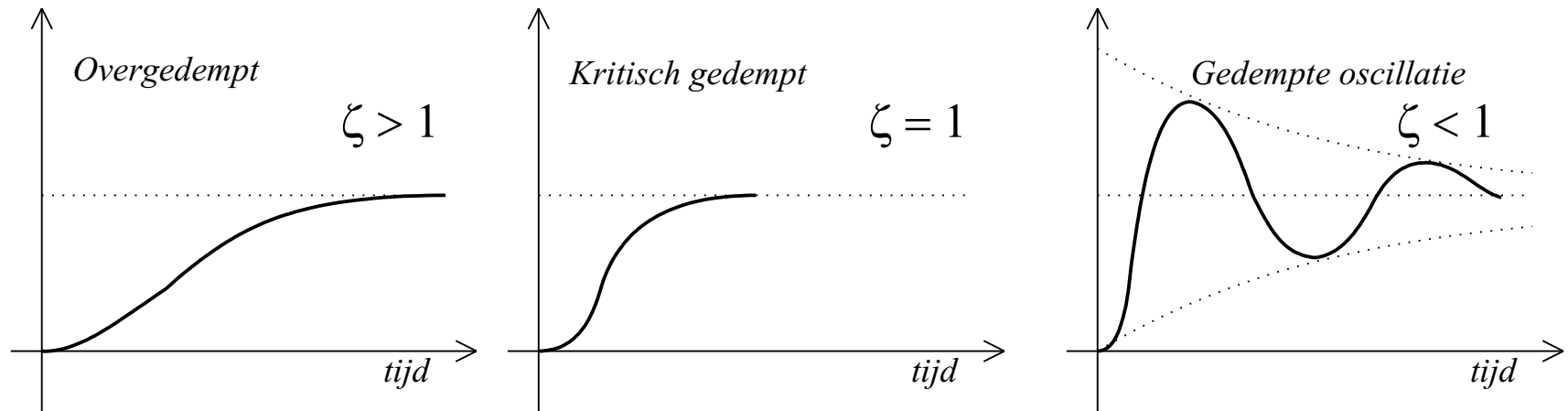
$$P_1 = -\omega_n \left(\zeta + j \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad \text{en} \quad P_1^* = -\omega_n \left(\zeta - j \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

- reëel deel ~ dempingsfactor
- imaginair deel = pulsatie gedempte oscillatie

= gedempte eigenpulsatie: $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

Staprespons tweede orde systeem (5)

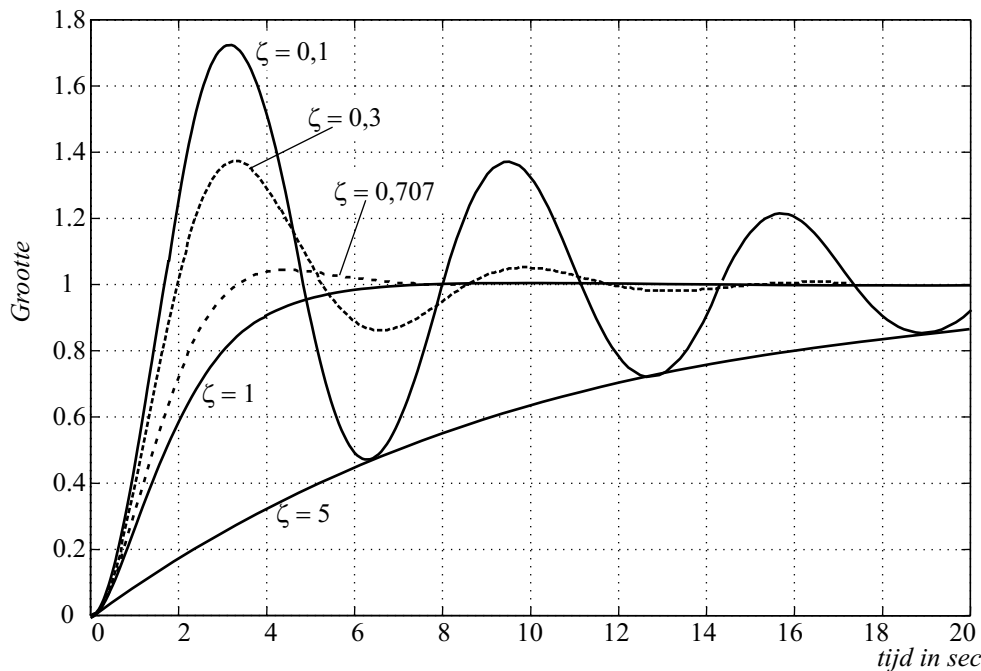
- **Staprespons: schematisch overzicht 3 gevallen**



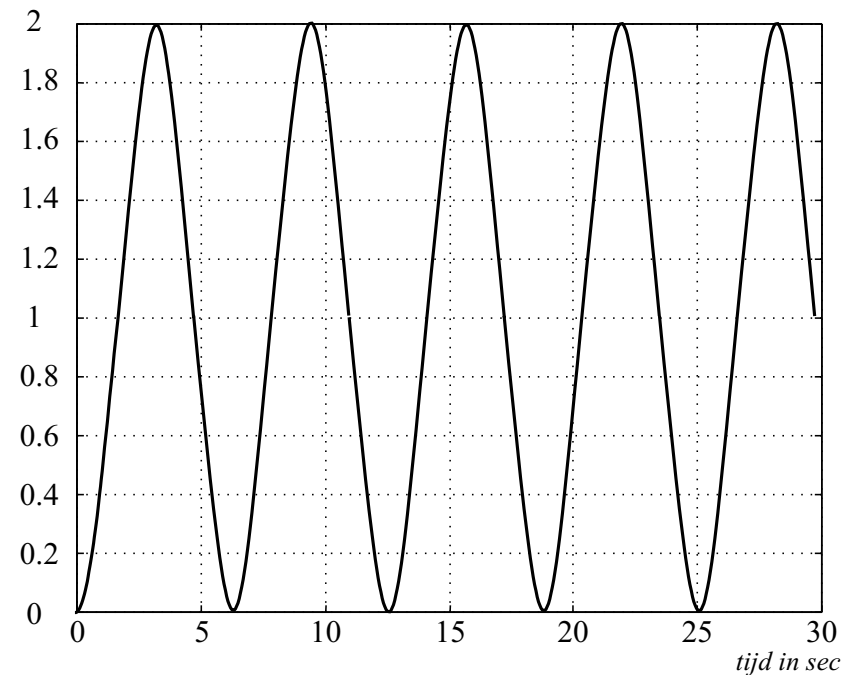
Staprespons tweede orde systeem (6)

- **Voorbeeld:**

- tweede orde systeem met $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, $K = 1$



overgedempt
kritisch gedempt
ondergedempt



ongedempt ($\zeta = 0$)

Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Doorschot

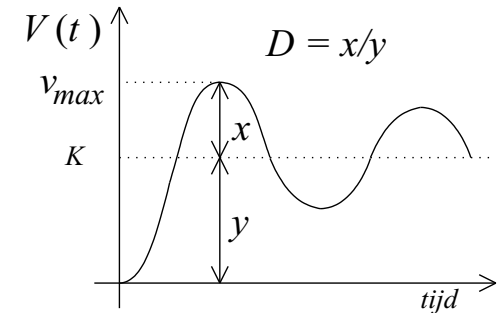
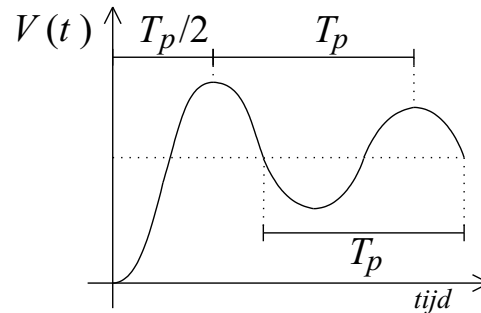
- **Definitie**

- doorschot (overshoot):

$$D = \frac{V_{stap\ max} - K}{K}$$

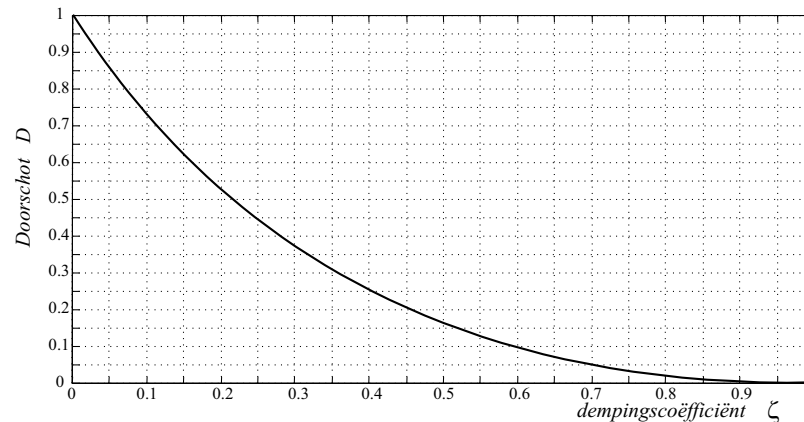
- merk op:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$



- **Verband met dempingsfactor**

$$\left\{ \begin{array}{l} D = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ \zeta = \frac{-\ln D}{\sqrt{\ln^2 D + \pi^2}} \end{array} \right.$$



Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Frequentierespons (1)

- **Magnitude- en faserespons**

- frequentierespons volgt uit transfertfunctie ($p = j\omega$):

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega}$$

- magnituderespons:

$$M = |G(j\omega)| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

wordt vaak uitgedrukt m.b.v. genormeerde pulsatie $u = \omega/\omega_n$

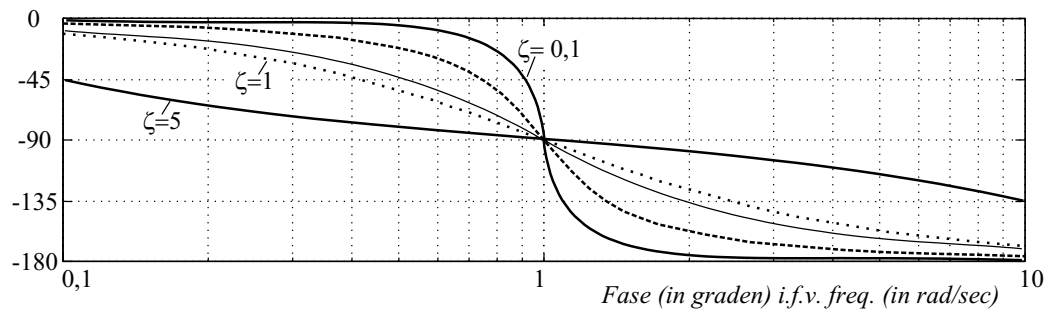
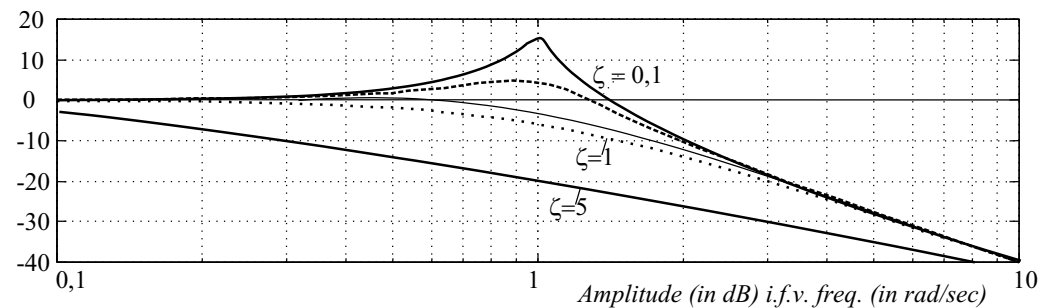
- faserespons:

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\text{bgtg} \left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \quad \text{of} \quad \varphi = -\text{bgtg} \left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2} \right)$$

Frequentierespons (2)

- **Bode-diagram**

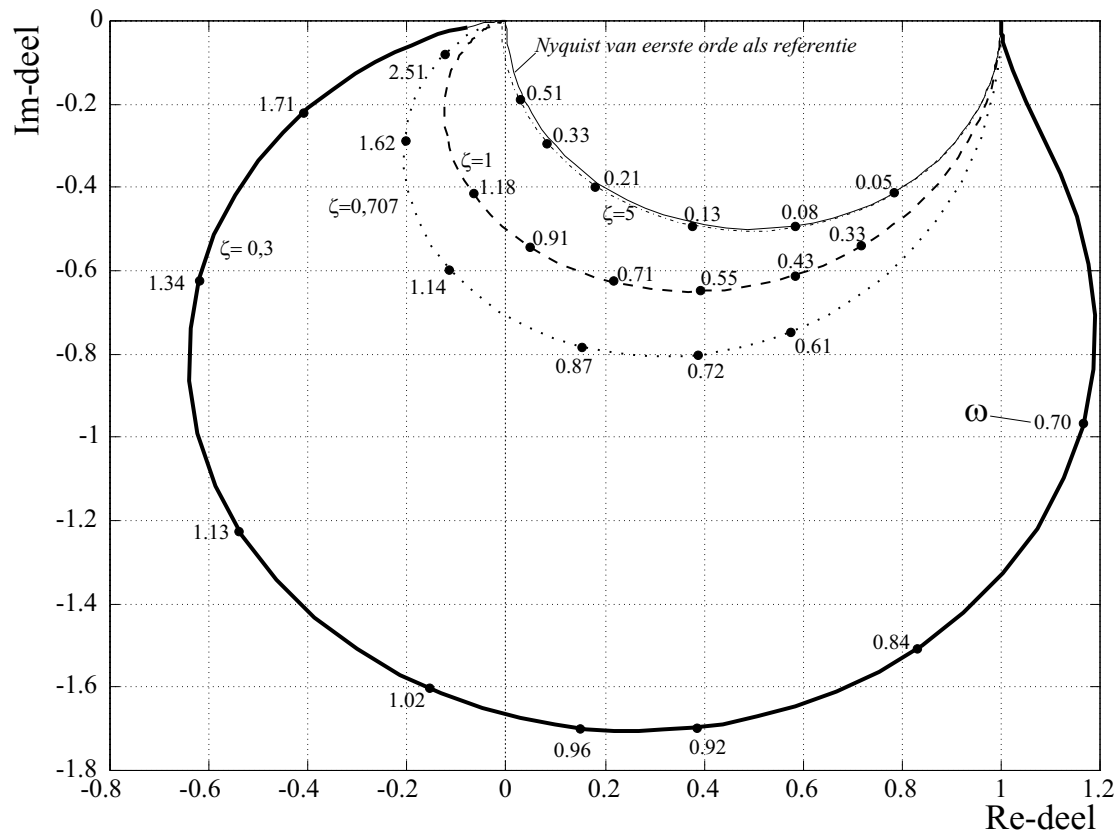
- tweede orde systeem met $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, $K = 1$
- asymptoten:
 - $\zeta \geq 1$: sommatie asymptoten twee eerste orde systemen
 - $\zeta < 1$: horizontaal tot breekpunt $\omega = \omega_n$, nadien 40 dB/decade dalend



Frequentierespons (3)

- **Nyquist-diagram**

- tweede orde systeem met $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, $K = 1$



Frequentierespons (4)

- **Resonantie**

- voor kleine ζ vertoont Bode-diagram resonantiepiek

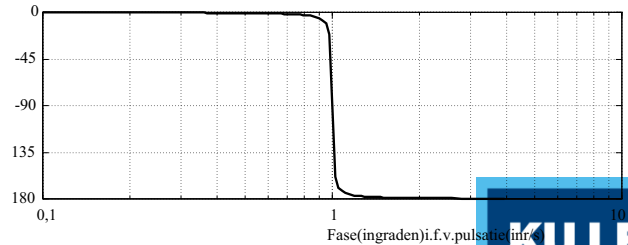
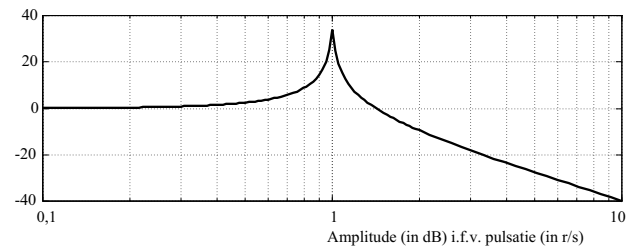
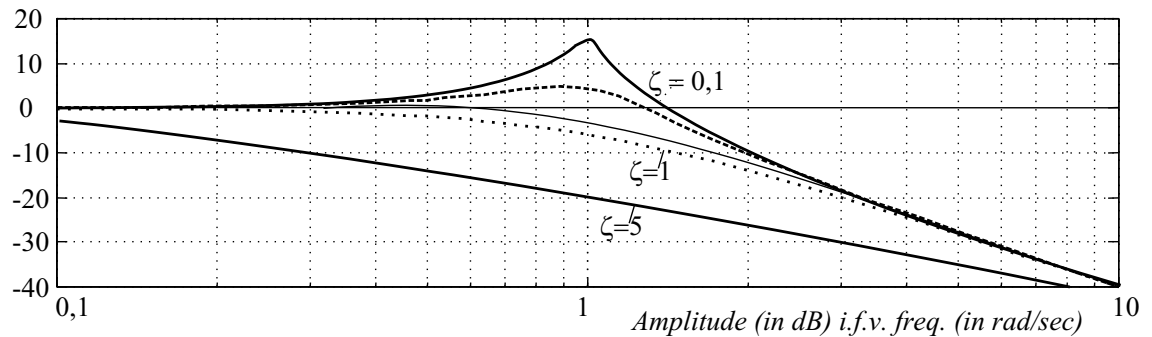
$$\zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\max_{\omega=0 \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = |G(j\omega_r)| = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- ongedempt systeem ($\zeta \rightarrow 0$):

- resonantiepiek $\rightarrow \infty$
- fasesprong 180°



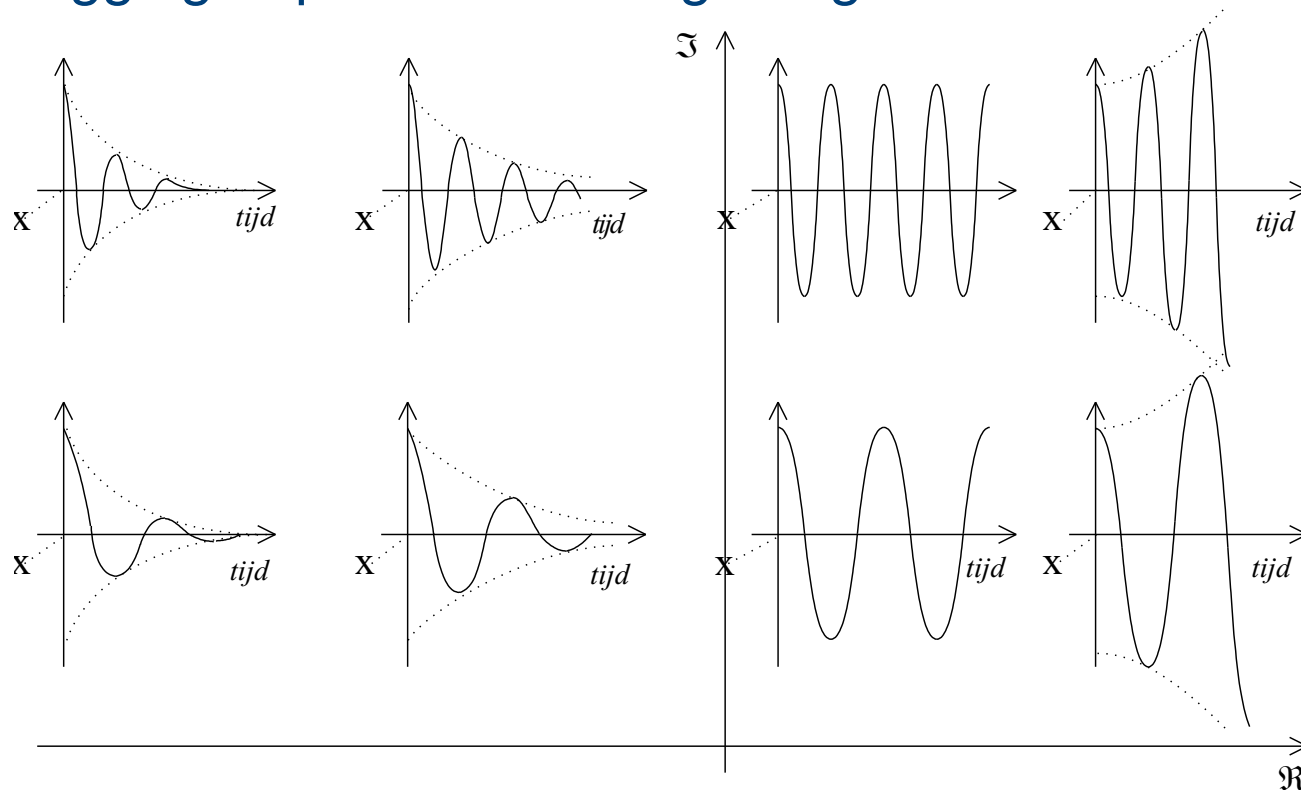
Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Nulpunten-polen-diagram

- **Polen**

- twee reële ($\zeta \geq 1$) of complex toegevoegde ($\zeta < 1$) polen
- ligging bepaalt transiënt gedrag en stabiliteit



Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Hogere orde systemen

- **Modelvorming hogere orde systemen**
 - eerste orde systemen: 2 parameters K en τ
 - tweede orde systemen:
 - ondergedempt: 3 parameters K , ω_n en ζ
 - overgedempt: 3 parameters K , τ_1 en τ_2
 - hogere orde systemen:
 - opdelen in cascade van eerste en tweede orde systemen
 - model is benadering van werkelijkheid!
 - orde kan oneindig groot worden

Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

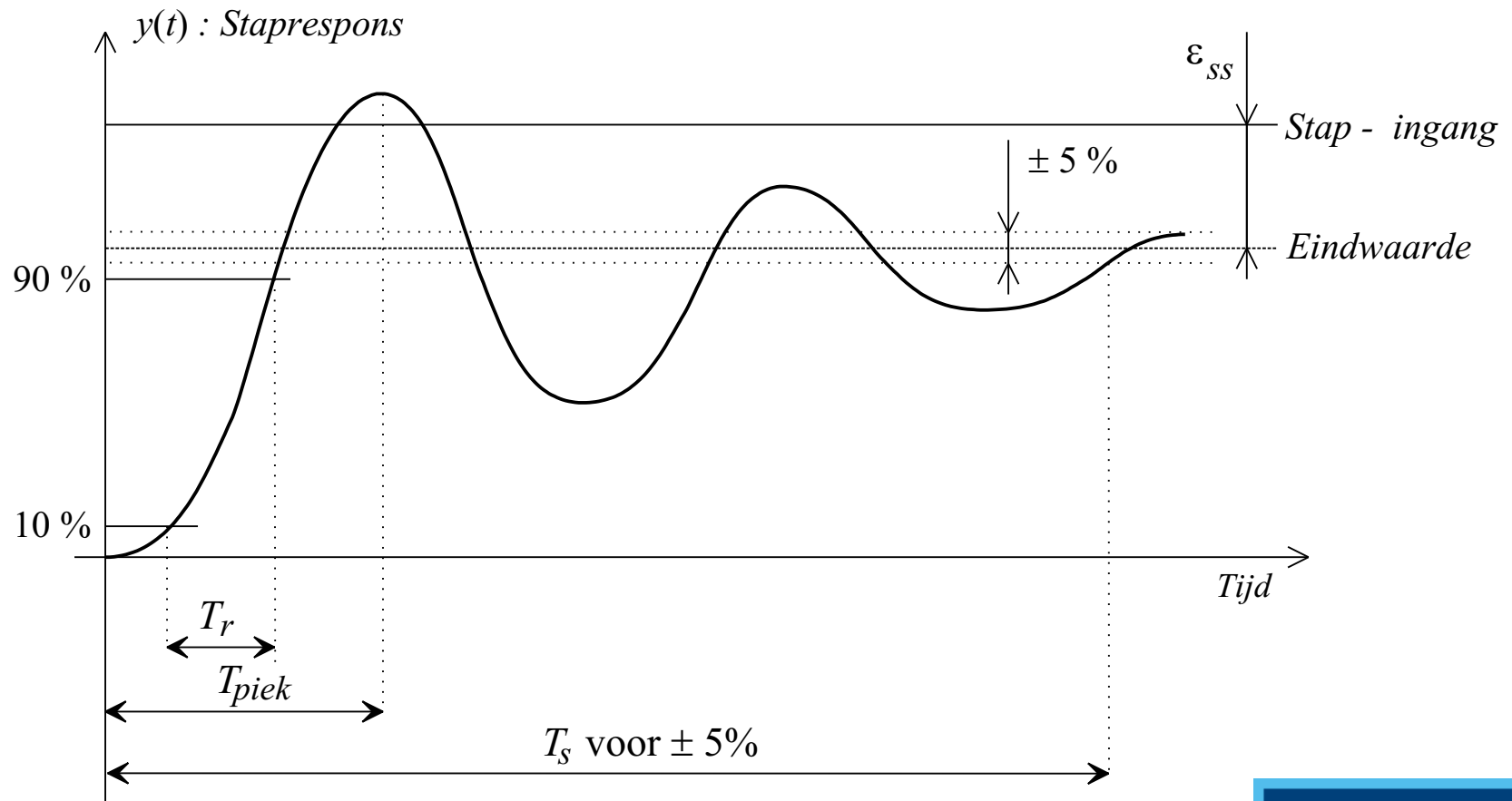
Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde (1)

- **Staprespons hogere orde systemen**

- maximum doorschot D (% van stapgrootte)
- aantal oscillaties
- stijgtijd (*rise time*) T_r : tijd van 10% naar 90% staprespons
- eindwaardetijd (*settling time*) T_s : tijd tot x% evenwichtswaarde
- piektijd (*peak time*) T_{piek} : tijd tot eerste maximum staprespons
- statische fout (*steady state error*): fout in evenwichtswaarde

Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde (2)

- **Staprespons hogere orde systemen**



Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Frequentierespons

- **Frequentierespons hogere orde systemen**

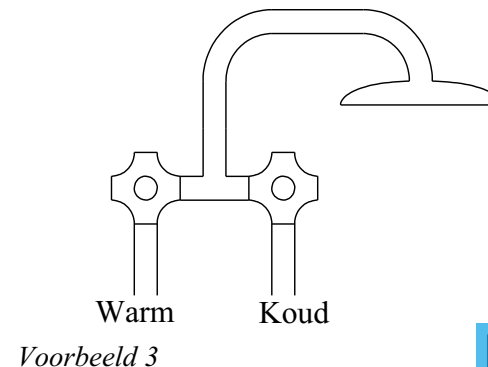
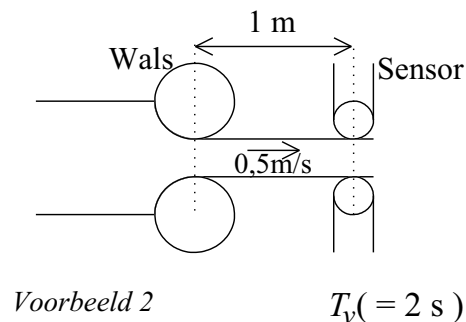
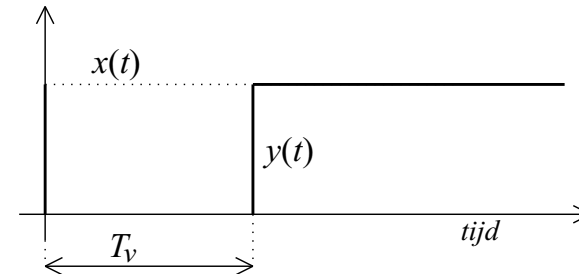
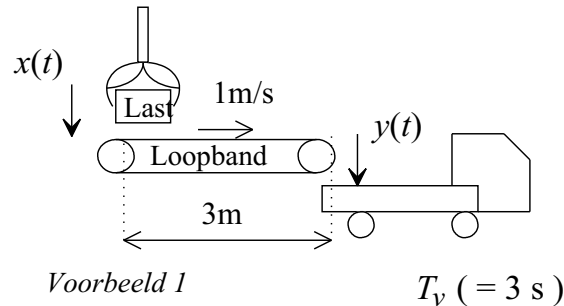
- gebaseerd op hogere orde systeemmodel = cascade van eerste en tweede orde systemen
- **magnituderespons**: totale vesterking = product afzonderlijke versterkingen = som afzonderlijke versterkingen in dB
- **faserespons**: totale faseverschuiving = som afzonderlijke faseverschuivingen

Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Systemen met dode tijd (1)

- **Dode tijd = Looptijd = Vertraging- of voortplantingstijd**
 - tijd tussen aanzet ingangssignaal en eerste reactie systeem
 - voorbeelden:



Systemen met dode tijd (2)

- **Dode tijd = zuivere vertraging**

- ingangs-/uitgangsverband:

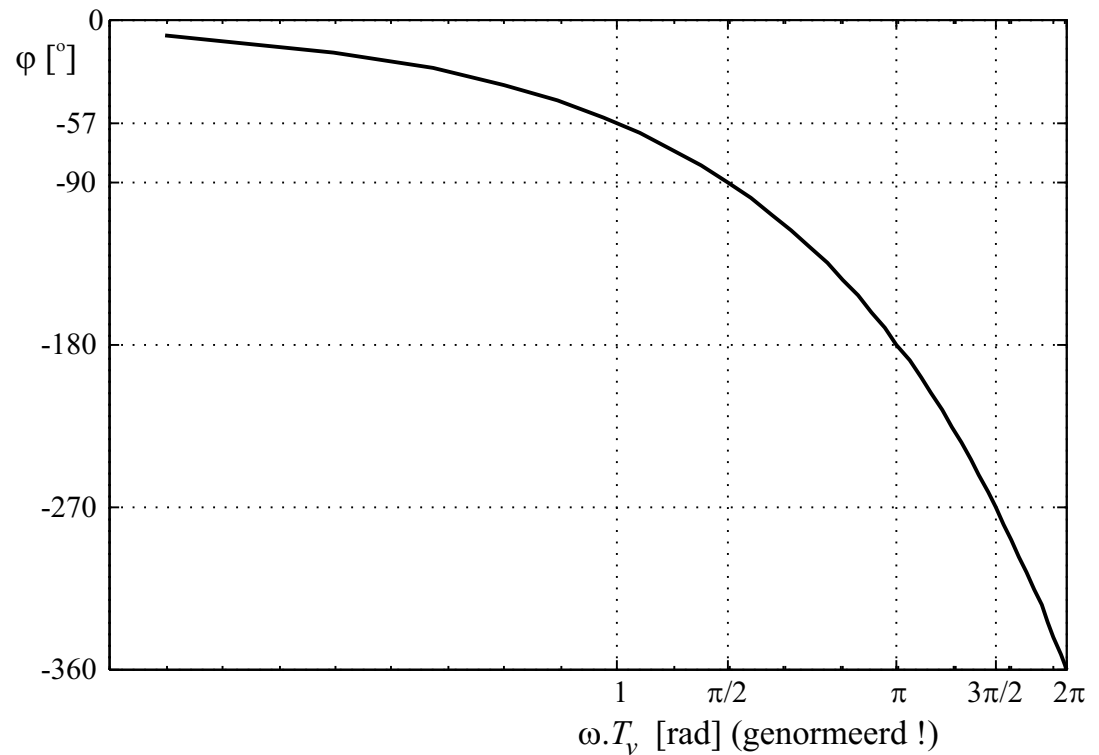
$$y(t) = x(t - T_v)$$

- transfertfunctie:

$$Y(p) = X(p)e^{-pT_v}$$

- Bode-diagram:

- magnitude = 0 dB
- fase = negatieve exponentiële



Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
 - Inleidend voorbeeld
 - Transferfunctie van tweede orde systeem
 - Staprespons van tweede orde systeem
 - Doorschot
 - Frequentierespons
 - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
 - Hogere orde systemen
 - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
 - Frequentierespons
 - Systemen met dode tijd
 - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

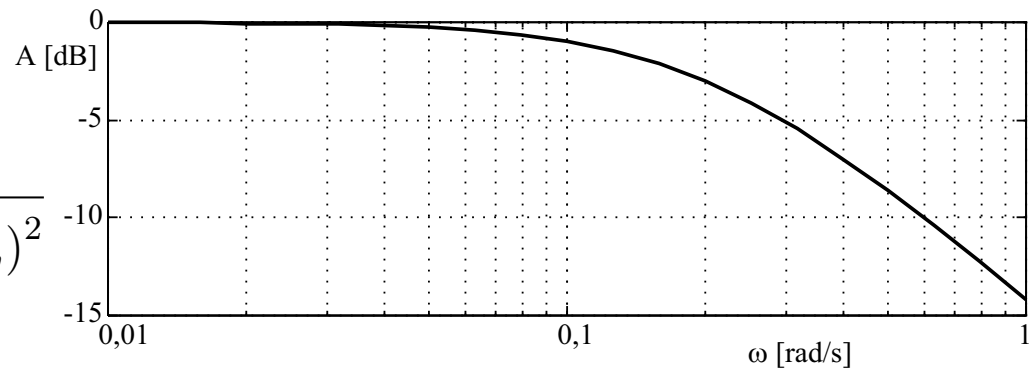
Frequentie-analyse systeem met dode tijd (1)

- **Bode-diagram: afwijkingen t.g.v. dode tijd**

- frequentierespons: $G(j\omega) = e^{-j\omega T_v} = \cos \omega T_v - j \sin \omega T_v$

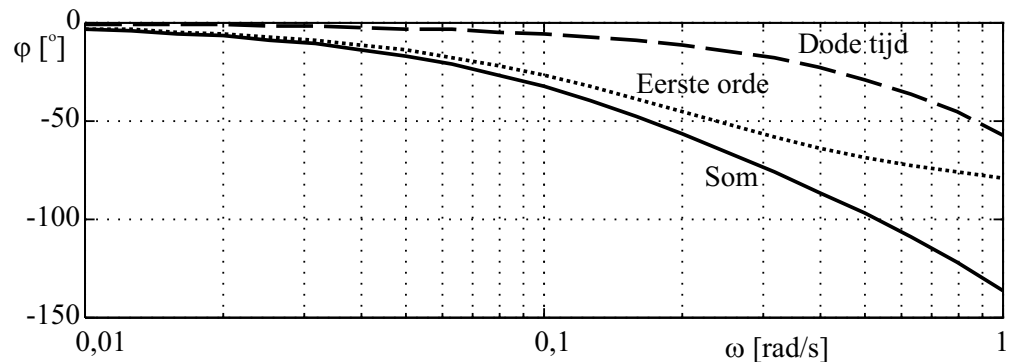
- magnituderespons:

$$\begin{aligned} M &= |G(j\omega)| \\ &= \sqrt{(\cos \omega T_v)^2 + (\sin \omega T_v)^2} \\ &= 1 = \text{geen afwijking} \end{aligned}$$



- faserespons:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{bgtg} \left[\frac{-\sin \omega T_v}{\cos \omega T_v} \right] \\ &= \text{bgtg} [-\text{tg}(\omega T_v)] = -\omega T_v. \end{aligned}$$



- voorbeeld: $G(p) = \frac{e^{-p}}{1 + 5p}$

Frequentie-analyse systeem met dode tijd (2)

- **Nyquist-diagram**

- Nyquist-diagram zuivere vertraging = cirkel
- gelijkmatige ω -verdeling langs cirkel

