



Regeltechniek

Les 3: Systemen van eerste orde

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen

ESAT – Departement Elektrotechniek

KU Leuven, Belgium

Regeltechniek: Tijdschema Hoorcolleges

- **Hoorcolleges: maandag 8:25 – 10:25**

- 29/09: Les 1
- 06/10: Les 2
- 13/10: Les 3
- 20/10: geen les
- 27/10: Les 4
- 03/11: Les 5
- 10/11: geen les
- 17/11: Les 6
- 24/11: Les 7
- 01/12: Les 8 & 10
- 08/12: Les 9
- 15/12: Les 11

Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**
 - Les 1: Inleiding en modelvorming
 - Les 2: Signaaltransformaties
 - Les 3: Systemen van eerste orde
 - Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd
- **Deel 2: Analoge regeltechniek**
 - Les 5: De regelkring
 - Les 6: Het wortellijnendiagram
 - Les 7: De klassieke regelaars
 - Les 8: Voorbeelden en toepassingen
 - Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
 - Les 10: Speciale regelstructuren
 - Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

Les 3: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
 - Inleiding & Voorbeeld
 - Transferfunctie van eerste orde systeem
 - Systeemrespons van eerste orde systeem
 - Systeemdiagram van eerste orde systeem
 - Bijzondere eerste orde systemen
 - Samenvatting

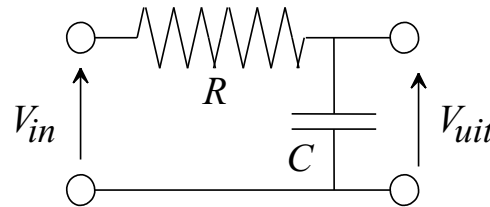
Inleiding

- **Systeem van eerste orde**

- eenvoudigste systeem dat we kunnen voorstellen (naast zuivere versterking/verzwakking = “nulde” orde systeem)
- laat toe om op eenvoudige manier verschillende “voorstellingswijzen” en eigenschappen te introduceren:
 - **systeemresponsen**: tijd- en frequentierespons
 - **systeemdiagrammen**: Bode-, Nyquist-, Black/Nichols-, nulpunten-polen-diagram
 - **eigenschappen**: integrerende vs. differentiërende werking
- eerste orde systemen komen in alle ingenieursdisciplines voor (elektrotechniek, mechanica, thermodynamica, hydraulica, ...) en hebben altijd dezelfde transfertfunctie

Voorbeeld

- Elektrisch eerste orde systeem: RC-kring



- afleiding 1: spanningsdeling over R en C

$$\text{TF} = \frac{V_{uit}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{1/pC}{R + 1/pC} = \frac{1}{1 + RCp}$$

→ eerste orde

- afleiding 2: spanning-stroomverband + Laplace-transformatie

$$V_{in}(t) = Ri(t) + V_{uit}(t) \quad \text{met} \quad V_{uit}(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \text{of} \quad i(t) = C \frac{dV_{uit}(t)}{dt}$$

$$V_{in}(p) = (RCp + 1) V_{uit}(p) \quad \rightarrow \quad \frac{V_{uit}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Les 3: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
 - Inleiding & Voorbeeld
 - Transferfunctie van eerste orde systeem
 - Systeemrespons van eerste orde systeem
 - Systeemdiagram van eerste orde systeem
 - Bijzondere eerste orde systemen
 - Samenvatting

Transferfunctie eerste orde systeem (1)

- **Orde van een systeem**

= hoogste macht van p in noemer transferfunctie

= graad van differentiaalvergelijking die systeem beschrijft
(= orde hoogste afgeleide in differentiaalvergelijking)

- **Eerste orde transferfuncties**

– fysische systemen: graad teller \leq graad noemer

– vier mogelijke eerste orde transferfuncties:

$$\frac{1}{\tau_i p} \quad , \quad \frac{1}{1 + \tau p} \quad , \quad \frac{\tau_d p}{1 + \tau p} \quad , \quad \frac{1 + \tau_v p}{1 + \tau p}$$

– telkens kan ook nog versterkingsfactor K worden toegevoegd

Transferfunctie eerste orde systeem (2)

- **Eerste orde transfertfuncties**

- meest gangbare vorm:

$$TF_{1e\ orde} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

- K = statische versterking [dimensieloos]
- τ = tijdconstante [seconden]

- zuivere integrator/differentiator:

$$TF_{int.} = \frac{1}{\tau_i p} \quad \text{en} \quad TF_{diff.} = \tau_d p$$

- τ_i = integratietijdconstante
- τ_d = differentiatietijdconstante

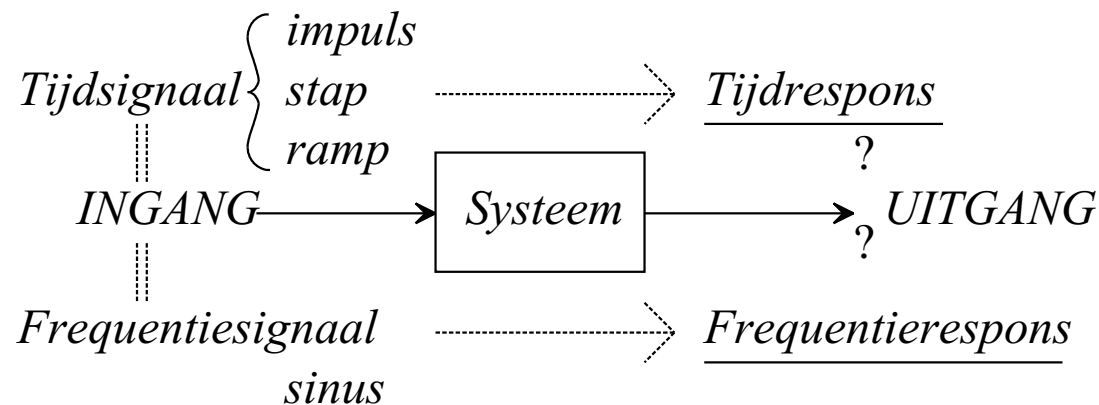
Les 3: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
 - Inleiding & Voorbeeld
 - Transferfunctie van eerste orde systeem
 - **Stelsysteemrespons van eerste orde systeem**
 - tijdsrespons
 - frequentierespons
 - Systeemdiagram van eerste orde systeem
 - Bijzondere eerste orde systemen
 - Samenvatting

Stelsysteemrespons eerste orde systeem (1)

- **Stelsysteemrespons**

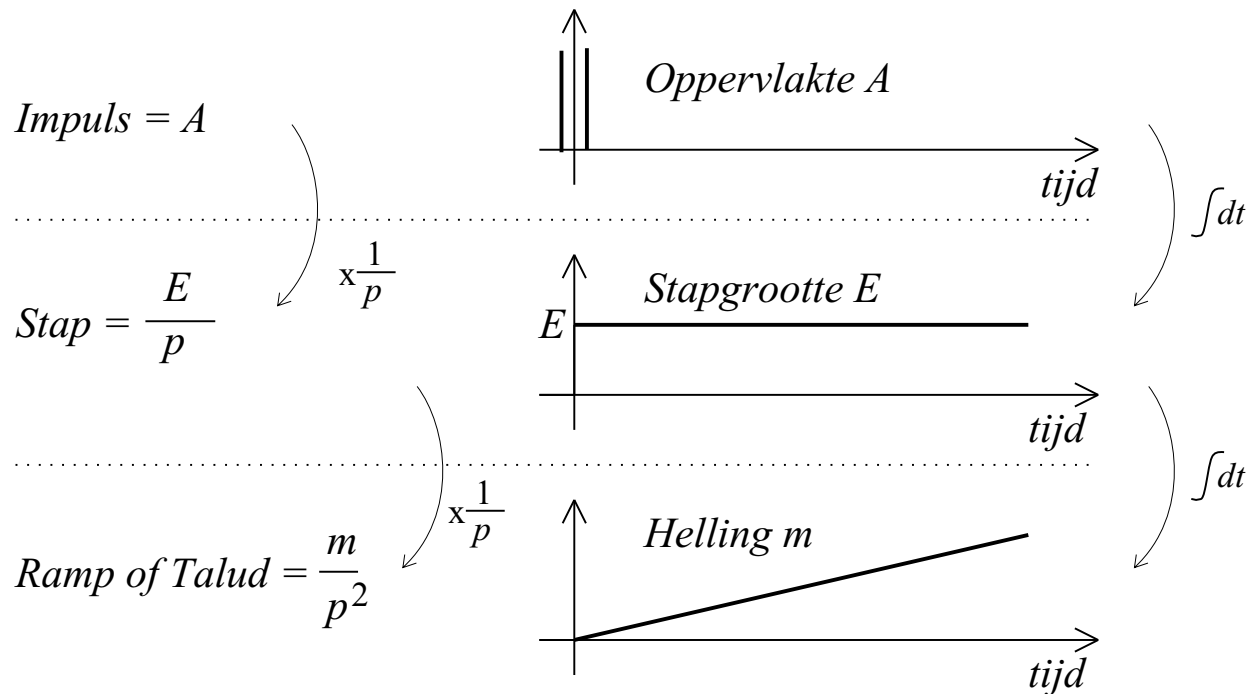
- lineair tijdsinvariant systeem heeft unieke reactie op welbepaald ingangssignaal
- **stelsysteemidentificatie/-analyse**: gekend ingangssignaal aanleggen & uitgangssignaal opmeten
- keuze ingangssignaal hangt af van beoogde analyse



Systemrespons eerste orde systeem (2)

- **Tijdrespons (1)**

- drie meest voorkomende ingangssignalen:



Systeemrespons eerste orde systeem (3)

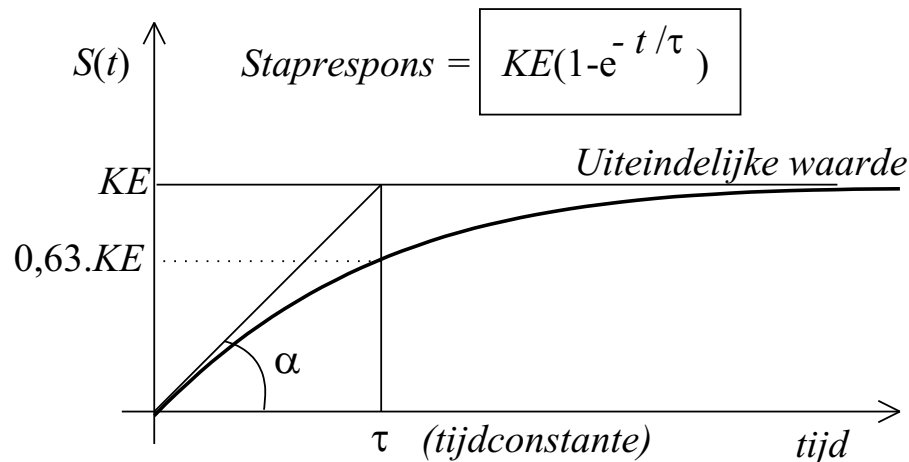
- **Tijdrespons (2)**

- staprespons Laplace-domein:

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{E}{p}$$

- staprespons tijdsdomein (via partieelbreuksplitsing):

$$S(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = KE \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



$$\alpha = \text{bgtg}\left(\frac{KE}{\tau}\right)$$

Systeemrespons eerste orde systeem (4)

- **Tijdrespons (3)**

- tijdconstante τ

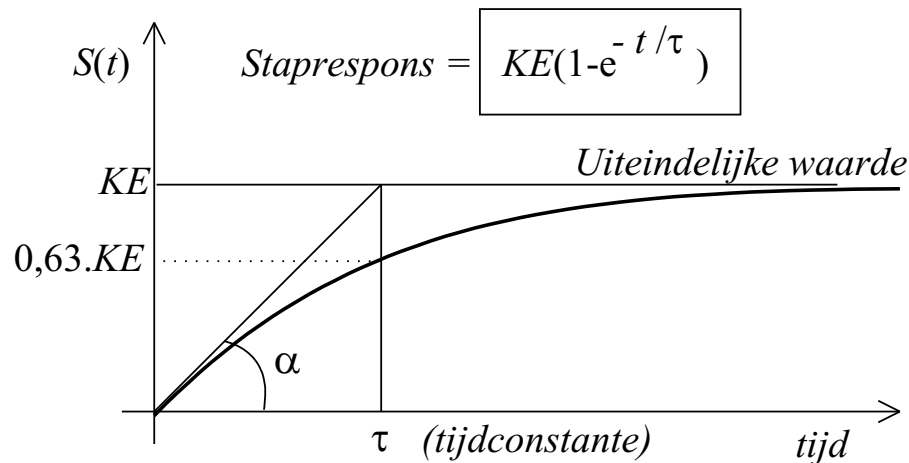
- = tijd waarbij staprespons 63% van evenwichtswaarde bereikt

- = tijd waarbij lineaire respons met hoek α evenwichtswaarde bereikt

- = maat voor snelheid van systeem

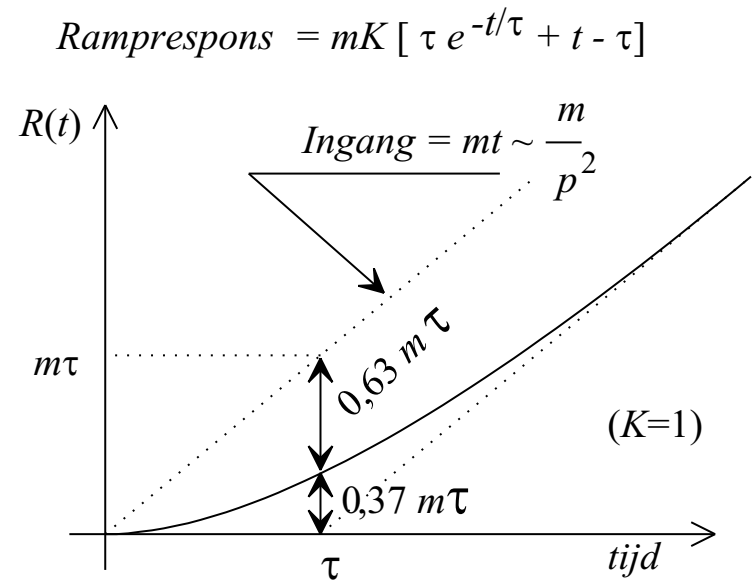
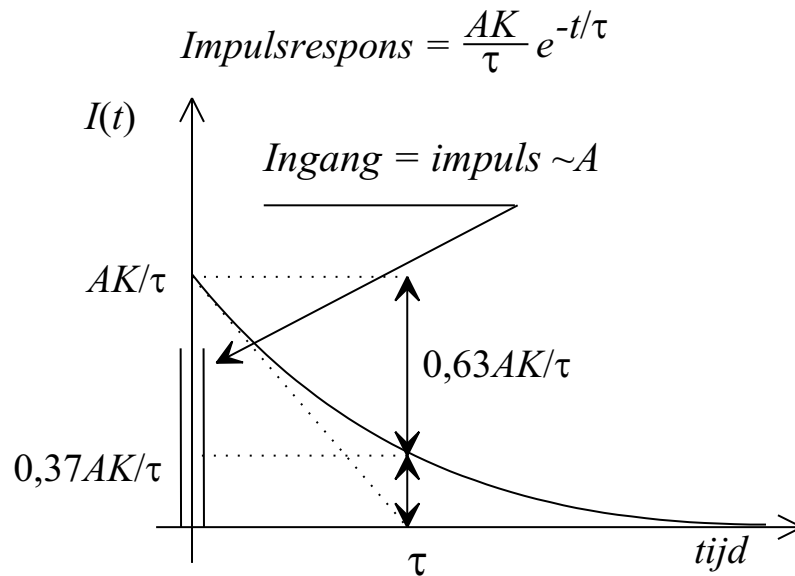
- statische versterkingsfactor K

- = versterkingsfactor van ingangssignaal naar evenwichtswaarde



Systemrespons eerste orde systeem (5)

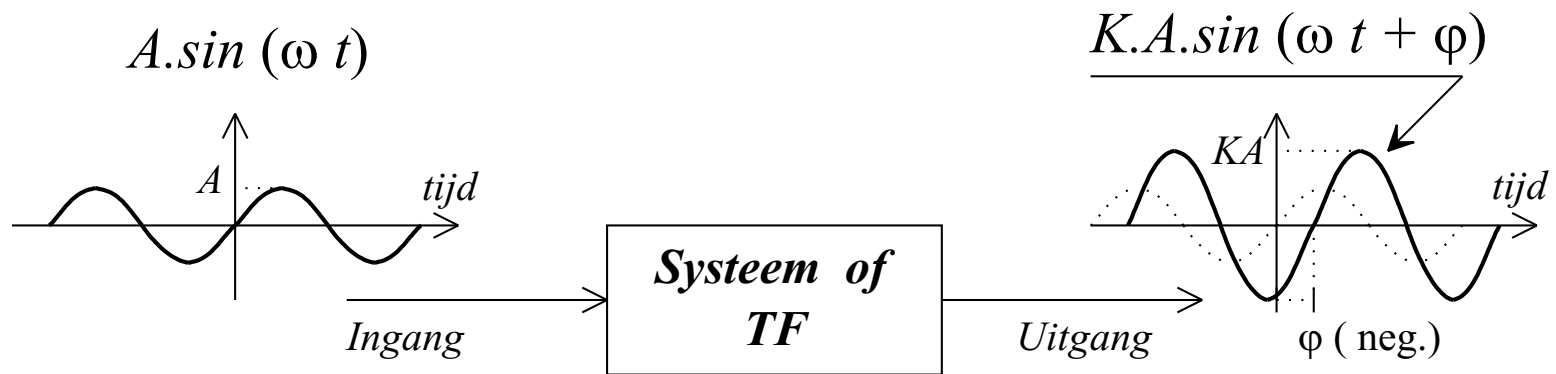
- **Tijdrespons (4)**
 - impulsrespons & ramprespons



Stelsysteemrespons eerste orde systeem (6)

- **Frequentierespons (1)**

- frequentierespons = systeemreactie op sinusoidaal signaal



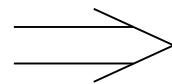
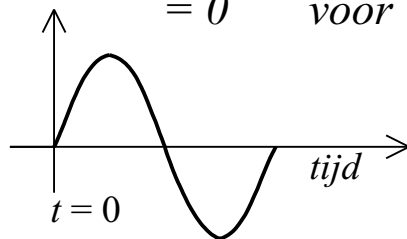
- versterking of verzwakking met factor K
- faseverschuiving met hoek φ
 - $\varphi < 0$: fase-naijling
 - $\varphi > 0$: fase-voorijling
- frequentie-analyse = berekening K , φ voor alle ω

Stelsysteemrespons eerste orde systeem (7)

- **Frequentierespons (2)**

- onmiddellijke systeemreactie op sinusoidaal signaal bestaat uit twee delen: **overgangsverschijnsel** + **regimetoestand**

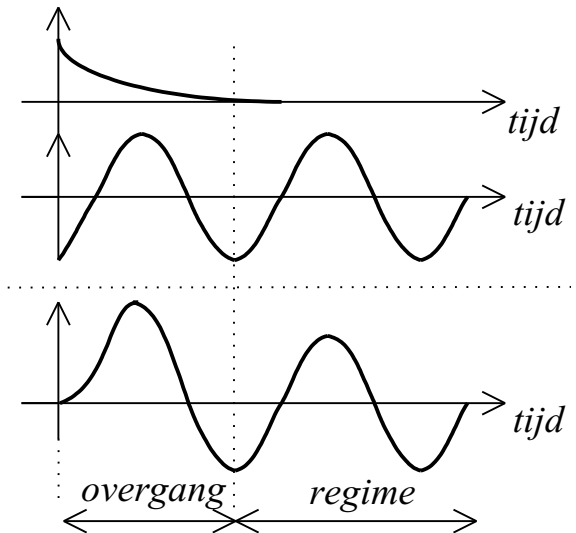
*Ingang = sinus voor $t > 0$
= 0 voor $t < 0$*



Overgangsverschijnsel

*Regimetoestand
(=freq.respons)*

Totaal (=som)



Systeemrespons eerste orde systeem (8)

- **Frequentierespons (3)**

- voorstelling resultaat frequentie-analyse:
 - Bode-diagram
 - Nyquist-diagram
- berekening frequentierespons uit transfertfunctie:

$$p = j\omega$$

- bewijs volgt uit inverse Laplace-transformatie van uitgangssignaal bij sinusoidaal ingangssignaal
[Baeten, SYST, Hoofdstuk 3, Sectie 3.19]

Systeemrespons eerste orde systeem (9)

- **Frequentierespons (4)**

- berekening uit TF voor eerste orde systeem:

$$TF_{1eorde} = G(p) = \frac{K}{1 + p\tau} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

- magnitude/amplitude- en faserespons:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = Me^{j\varphi} \text{ met}$$

$$M = |G(j\omega)| = \left| \frac{K}{1 + j\omega\tau} \right| = \frac{K}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \angle \text{Teller} - \angle \text{Noemer} = 0 - \text{bgtg}(\omega\tau)$$

Les 3: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
 - Inleiding & Voorbeeld
 - Transferfunctie van eerste orde systeem
 - Systeemrespons van eerste orde systeem
 - Systeemdiagram van eerste orde systeem
 - Bode-diagram
 - Nyquist-diagram
 - Black- of Nichols-diagram
 - nulpunten-polen-diagram
 - Bijzondere eerste orde systemen
 - Samenvatting

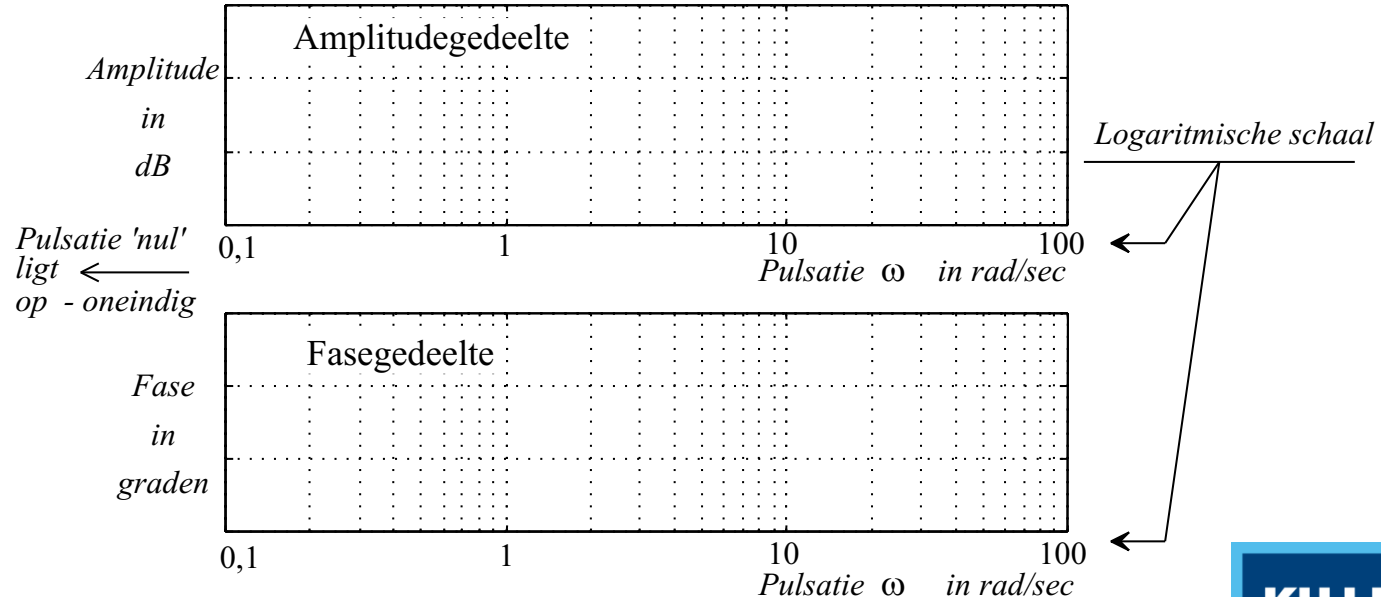
Systemdiagram eerste orde systeem (1)

- **Bode-diagram (1)**

- amplitude- (in dB) en faserespons vs. pulsatie (log-schaal)

$$A = 20 \log M = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$\varphi = \angle G(j\omega)$$



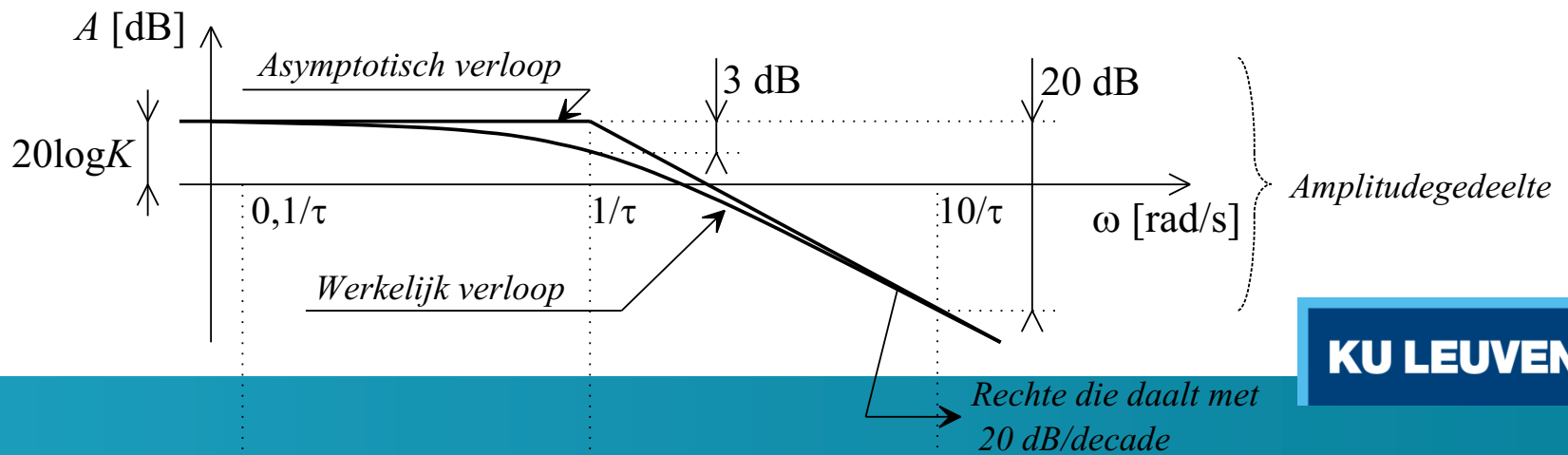
Systemendiagram eerste orde systeem (2)

- **Bode-diagram (2)**

- amplitudeverloop voor eerste orde systeem

$$A(\omega) = 20 \log M(\omega) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- voor zeer kleine ω -waarden: $\omega\tau \ll 1 \rightarrow A = 20 \log K$
- voor waarde $\omega = 1/\tau$:
(breek- of snijpulsatie) $A \left(\frac{1}{\tau} \right) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + 1} = 20 \log K - 3 \text{ dB}$
- voor zeer grote ω -waarden: $\omega\tau \gg 1 \rightarrow A = 20 \log K - 20 \log (\omega\tau)$



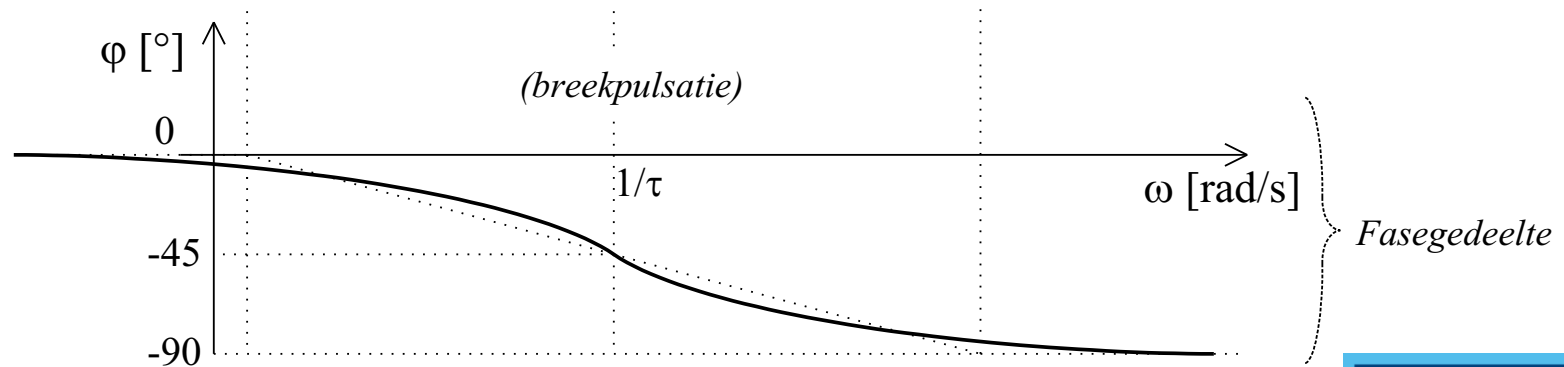
Systeemdiagram eerste orde systeem (3)

- **Bode-diagram (3)**

- faseverloop voor eerste orde systeem

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \angle \text{Teller} - \angle \text{Noemer} = 0 - \text{bgtg}(\omega\tau)$$

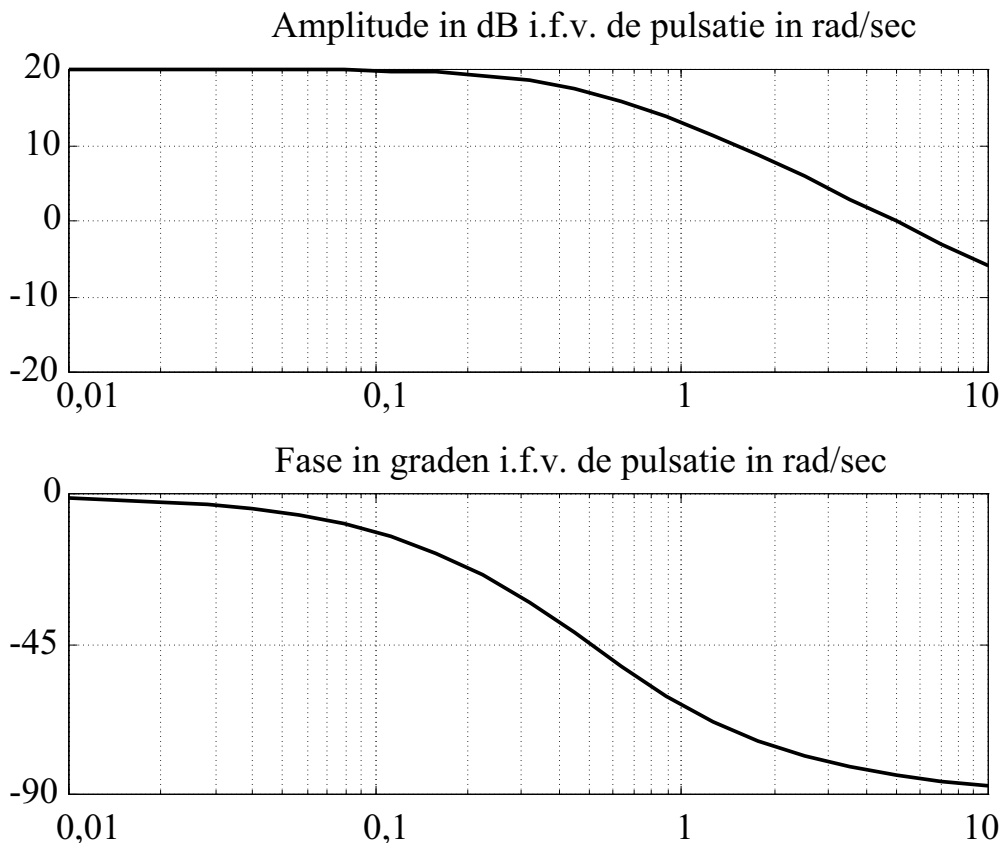
- $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\omega = 1/\tau \Rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -90^\circ$



Systeendiagram eerste orde systeem (4)

- **Bode-diagram (4)**

- voorbeeld:



$$G(p) = \frac{10}{2p + 1}$$

interpretatie:

- laagdoorlaatfilter
- $[0, 1/\tau]$ = bandbreedte

Systemendiagram eerste orde systeem (5)

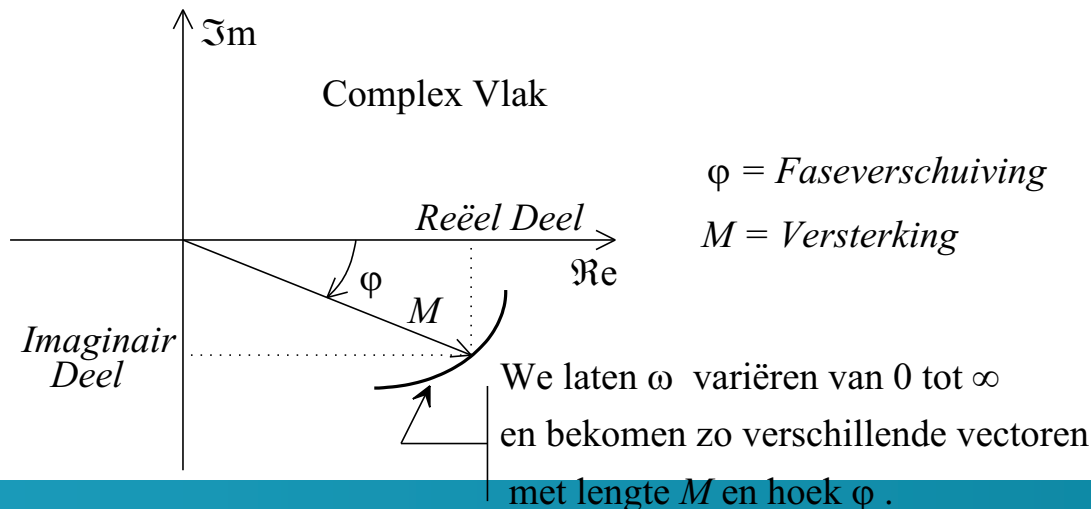
- **Nyquist-diagram (1)**

- reëel vs. imaginair deel frequentierespons

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} (1 - j\tau\omega)$$

$$\Re[G(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \quad \text{en} \quad \Im[G(j\omega)] = -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

- kan worden geschetst op basis van Bode-diagram: teken voor elke pulsatie ω eindpunt vector met lengte M en hoek φ



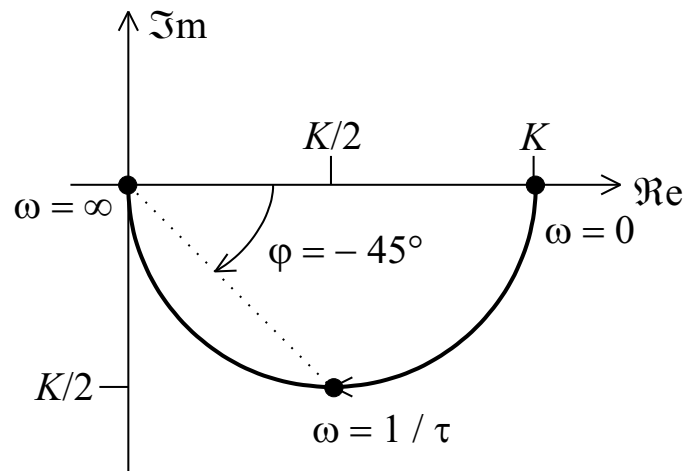
Systeemdiagram eerste orde systeem (6)

- **Nyquist-diagram (2)**

- eerste orde systeem: enkele belangrijke punten

$\omega = 0$	\rightarrow	$\Re e = K$	$\Im m = 0$	$M = K$	$\varphi = 0^\circ$
$\omega = 1/\tau$	\rightarrow	$\Re e = K/2$	$\Im m = -K/2$	$M = K\sqrt{2}/2$	$\varphi = -45^\circ$
$\omega = \infty$	\rightarrow	$\Re e = 0$	$\Im m = 0$	$M = 0$	$\varphi = -90^\circ$

- eerste orde systeem: Nyquist-diagram = halve cirkel

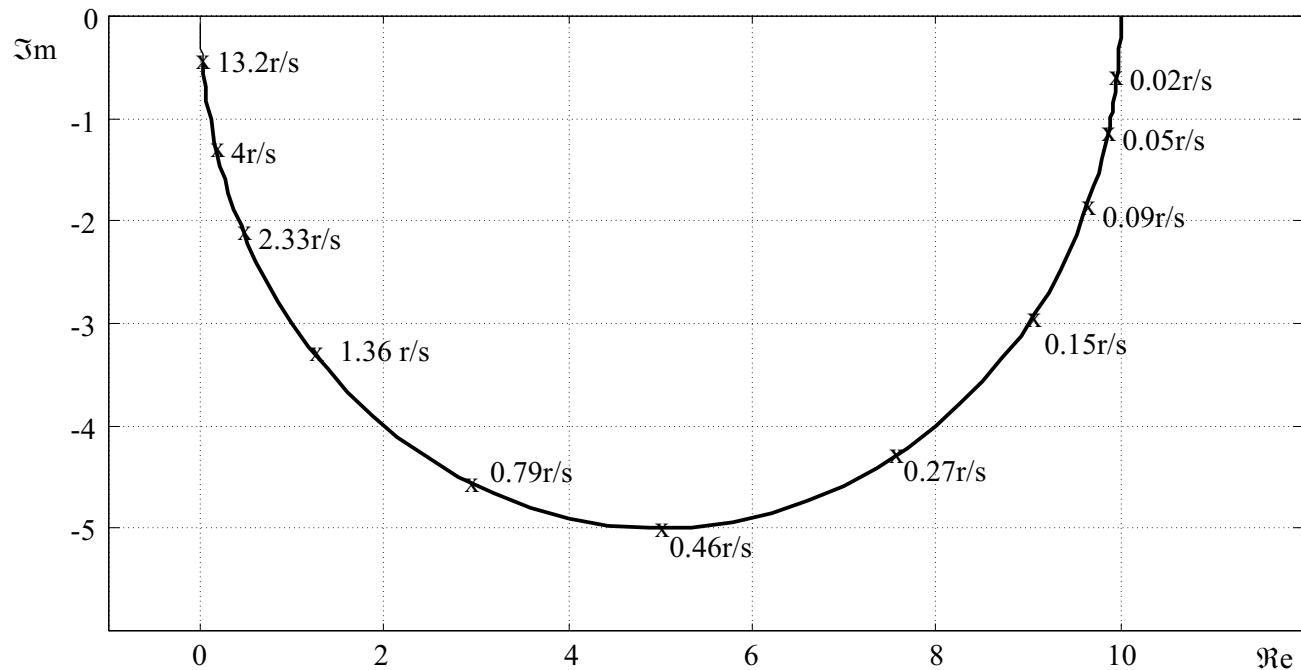


Systeendiagram eerste orde systeem (7)

- **Nyquist-diagram (3)**

- voorbeeld:

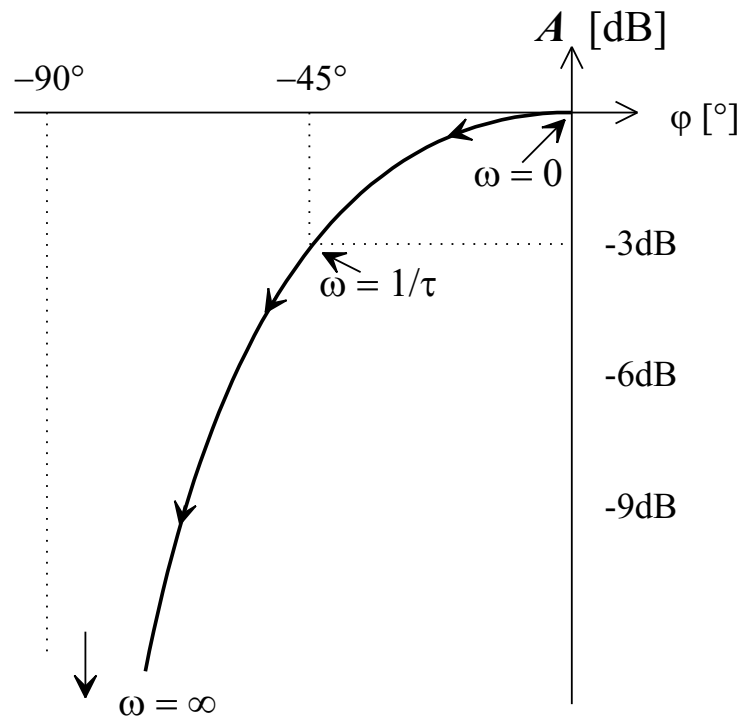
$$G(p) = \frac{10}{2p + 1}$$



Systeemdiagram eerste orde systeem (8)

- **Black- of Nichols-diagram**

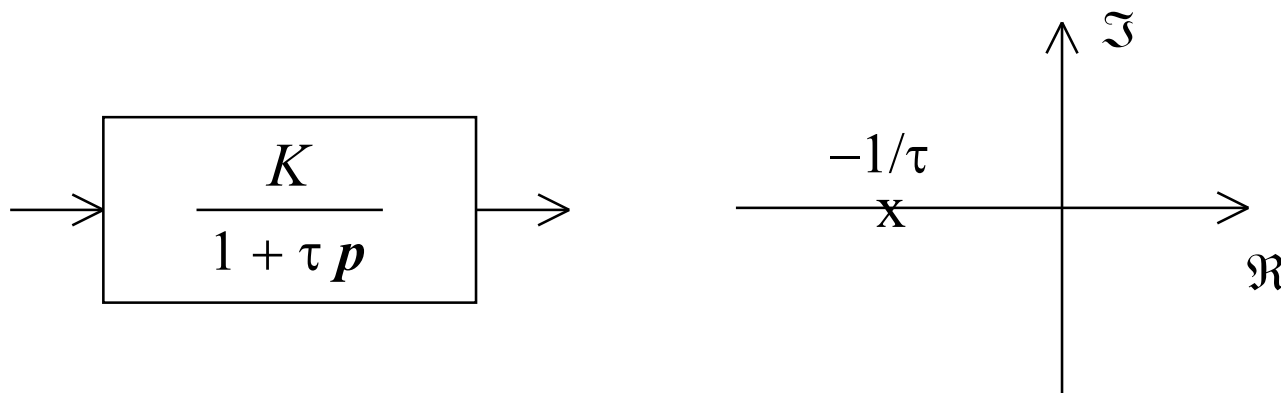
- amplitude- (in dB) vs. faserespons
- voorbeeld eerste orde systeem met $K = 1$



Systeemdiagram eerste orde systeem (8)

- **nulpunten-polen-diagram (1)**

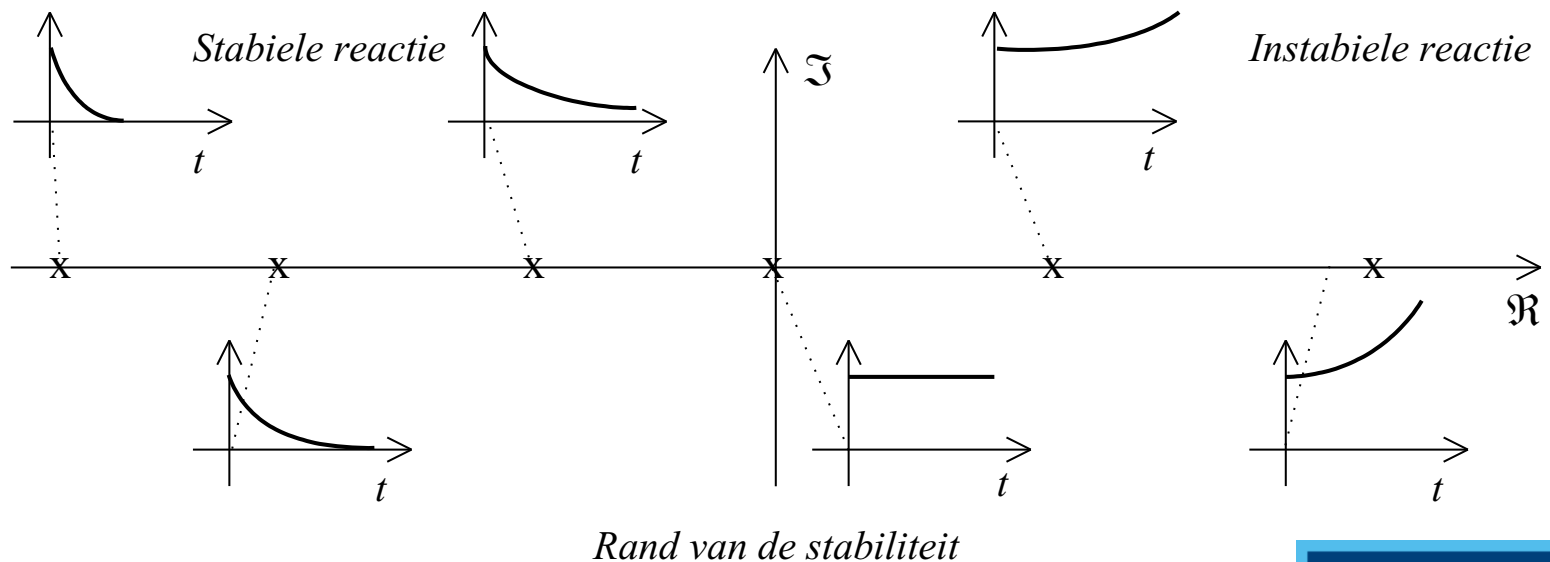
- nulpunten = wortels teller TF (o)
- polen = wortels noemer TF (x)
- nulpunten-polen-diagram = nulpunten/polen in complexe vlak
- eerste orde systeem:



Systeemdiagram eerste orde systeem (9)

- **nulpunten-polen-diagram (2)**

- ligging polen bepaalt transiënt gedrag systeem: $\frac{1}{p - a} \rightarrow e^{at}$
 - $a < 0$: **stabiel systeem** (transiënt gedrag sterft uit)
 - $a = 0$: **marginaal stabiel systeem** (transiënt gedrag blijft)
 - $a > 0$: **instabiel systeem** (transiënt neemt toe)



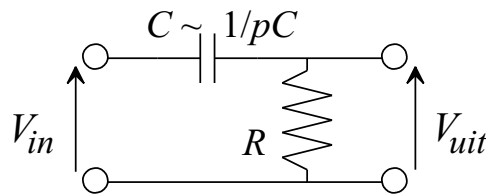
Les 3: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
 - Inleiding & Voorbeeld
 - Transferfunctie van eerste orde systeem
 - Systeemrespons van eerste orde systeem
 - Systeemdiagram van eerste orde systeem
 - **Bijzondere eerste orde systemen**
 - Eerste orde met differentiërende werking
 - Zuivere integrator
 - Zuivere differentiator
 - “Omgekeerd” eerste orde systeem
 - Samenvatting

Bijzondere eerste orde systemen (1)

- **Eerste orde systeem met differentiërende werking (1)**

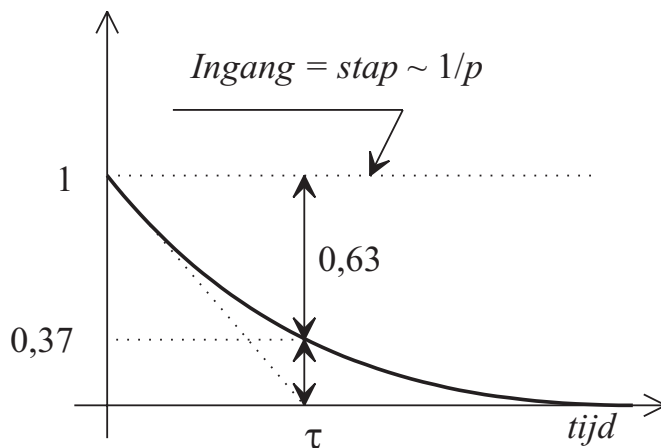
- voorbeeld: RC-kring



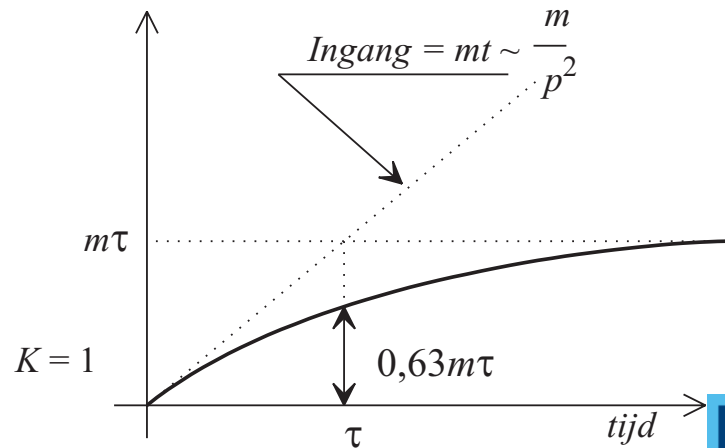
$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{RCp}{RCp + 1} = \frac{\tau p}{\tau p + 1} \quad \text{met } \tau = RC \text{ [sec]}$$

- stap- en ramprespons

$$\text{Staprespons} = e^{-t/\tau}$$



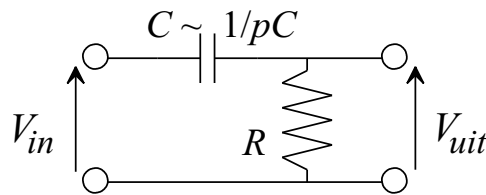
$$\text{Ramprespons} = m \tau [1 - e^{-t/\tau}]$$



Bijzondere eerste orde systemen (2)

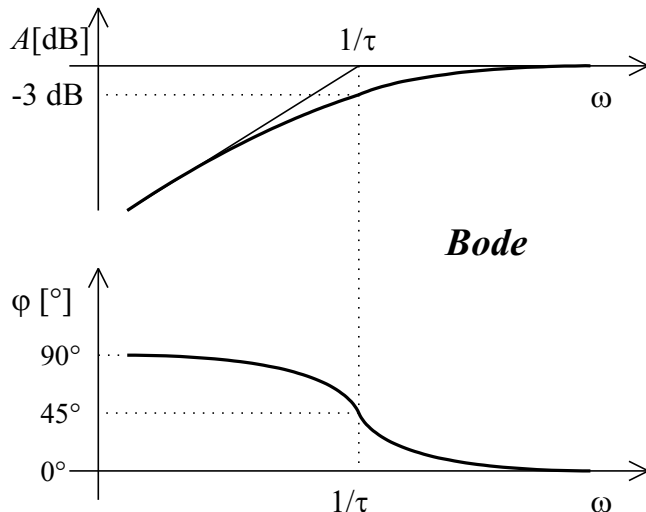
- **Eerste orde systeem met differentiërende werking (2)**

- voorbeeld: RC-kring

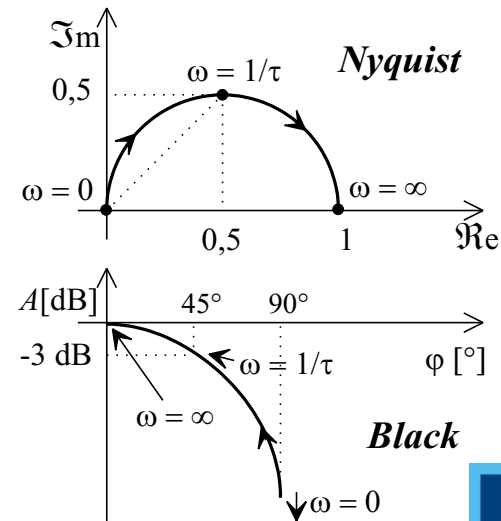


$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{RCp}{RCp + 1} = \frac{\tau p}{\tau p + 1} \quad \text{met } \tau = RC \text{ [sec]}$$

- frequentiediagrammen



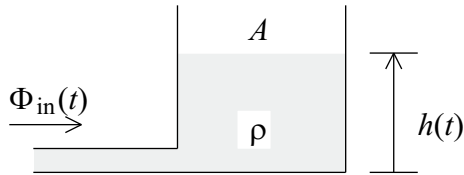
$K = 1$



Bijzondere eerste orde systemen (3)

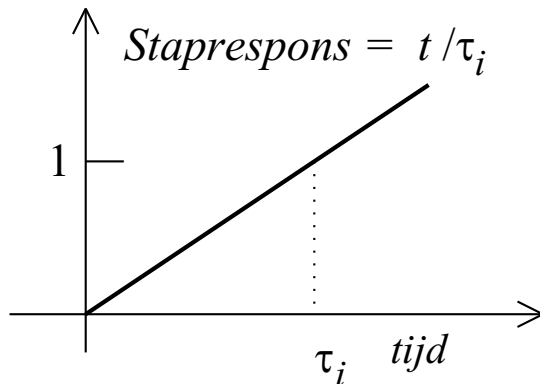
- **Zuivere integrator (1)**

- voorbeeld: vloeistofreservoir

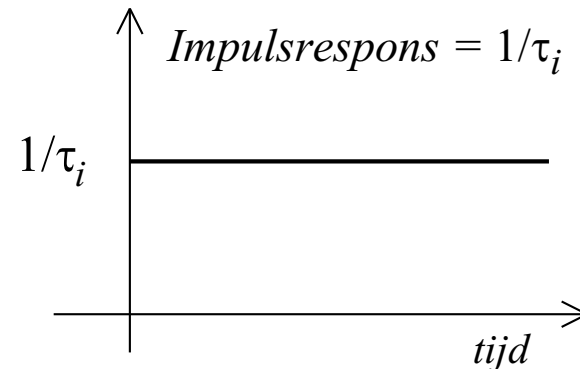


$$\Phi_{in}(t) = \rho A \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{of} \quad \frac{H(p)}{\phi_{in}(p)} = \frac{1}{\tau p} \quad \text{met} \quad \rho A = \tau \quad [\text{sec}]$$

- stap- en impulsrespons $TF_{integrator} = \frac{1}{p\tau_i}$



(Ingang = stap met grootte 1)



(Ingang = Impuls met oppervlakte 1)

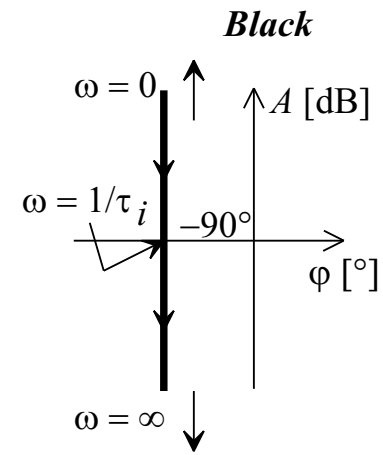
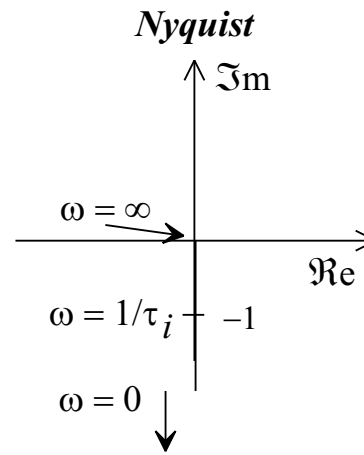
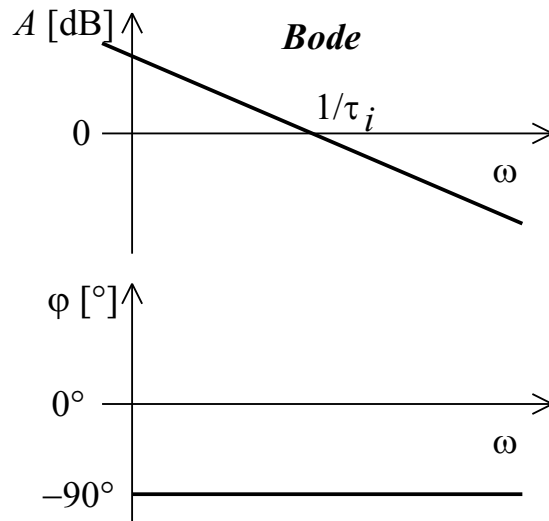
Bijzondere eerste orde systemen (4)

- **Zuivere integrator (2)**

- frequentierespons

$$G_i(j\omega) = -j \frac{1}{\omega\tau_i} \rightarrow M = \frac{1}{\omega\tau_i} \text{ en } \varphi = -90^\circ$$
$$\rightarrow \Re e = 0 \text{ en } \Im m = -\frac{1}{\omega\tau_i}$$

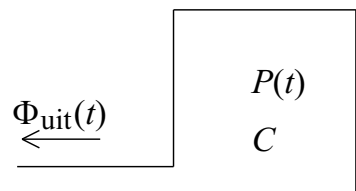
- frequentiediagrammen



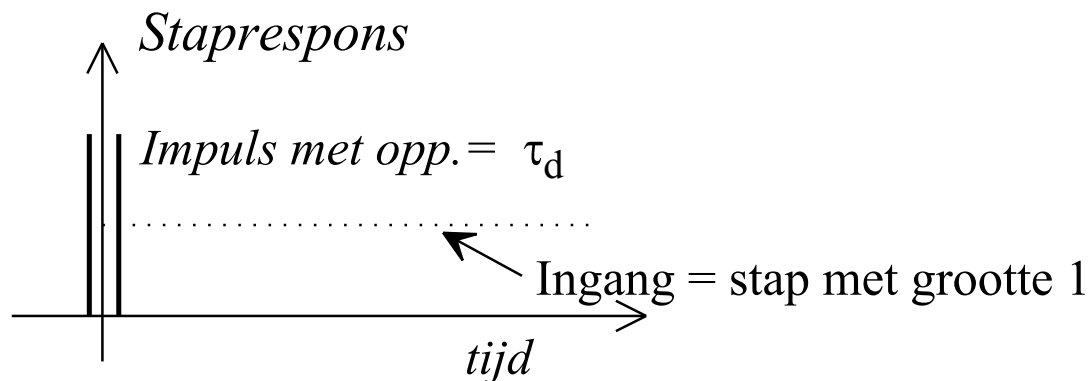
Bijzondere eerste orde systemen (5)

- **Zuivere differentiator (1)**

- voorbeeld: drukvat


$$\Phi_{uit}(t) = C \frac{dP(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{\Phi_{uit}(p)}{P(p)} = pC = p\tau_d$$

- staprespons $TF_{differentiator} = p\tau_d$



- impulsrespons = ∞

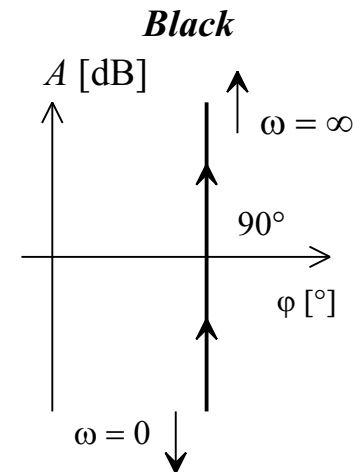
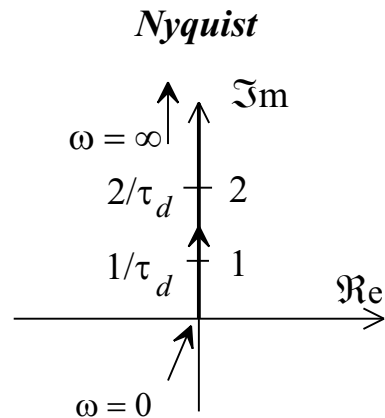
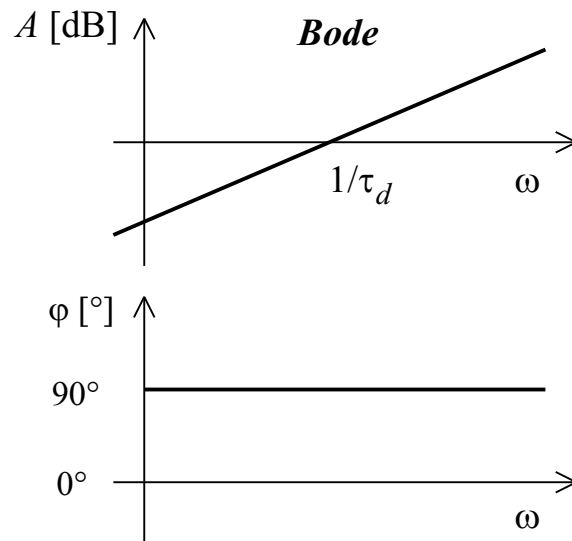
Bijzondere eerste orde systemen (6)

- **Zuivere differentiator (2)**

- frequentierespons

$$G_d(j\omega) = j\omega\tau_d \rightarrow M = \omega\tau_d \text{ en } \varphi = 90^\circ$$
$$\rightarrow \Re e = 0 \text{ en } \Im m = \omega\tau_d$$

- frequentiediagrammen

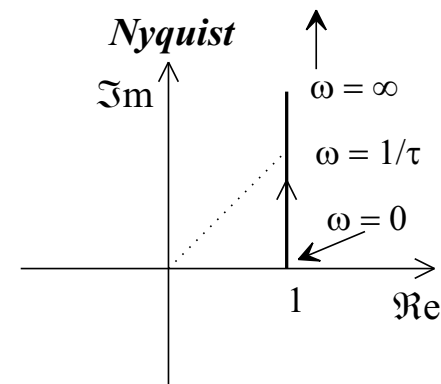
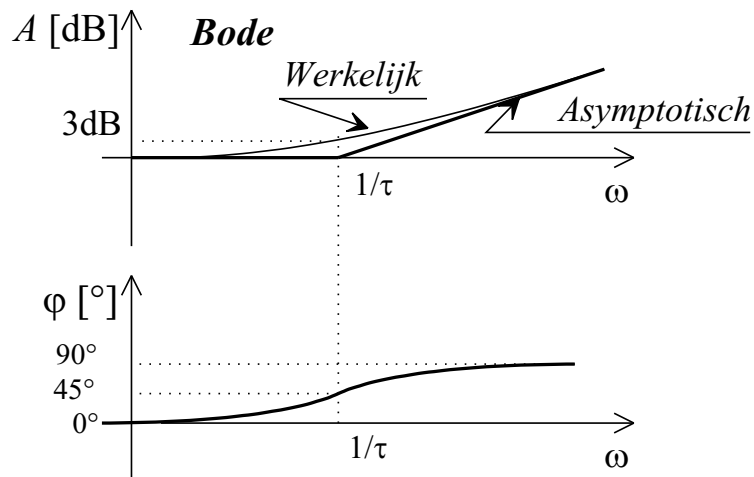


Bijzondere eerste orde systemen (7)

- **“Omgekeerd” eerste orde systeem:** $TF = 1 + \tau_v p$
 - “ideale PD-regelaar” (zie later)
 - komt enkel voor als onderdeel van groter systeem

$$G(j\omega) = 1 + j\tau_v\omega \rightarrow \Re e = 1 \quad \Im m = \tau_v\omega$$
$$M = \sqrt{1 + (\tau_v\omega)^2} \quad \varphi = \text{bgtg}(\tau\omega)$$

- frequentiediagrammen



Les 3: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
 - Inleiding & Voorbeeld
 - Transferfunctie van eerste orde systeem
 - Systeemrespons van eerste orde systeem
 - Systeemdiagram van eerste orde systeem
 - Bijzondere eerste orde systemen
 - **Samenvatting**
 - Bode-diagram van willekeurig systeem
 - Samenvatting nulpunten-polen-beeld

Samenvatting (1)

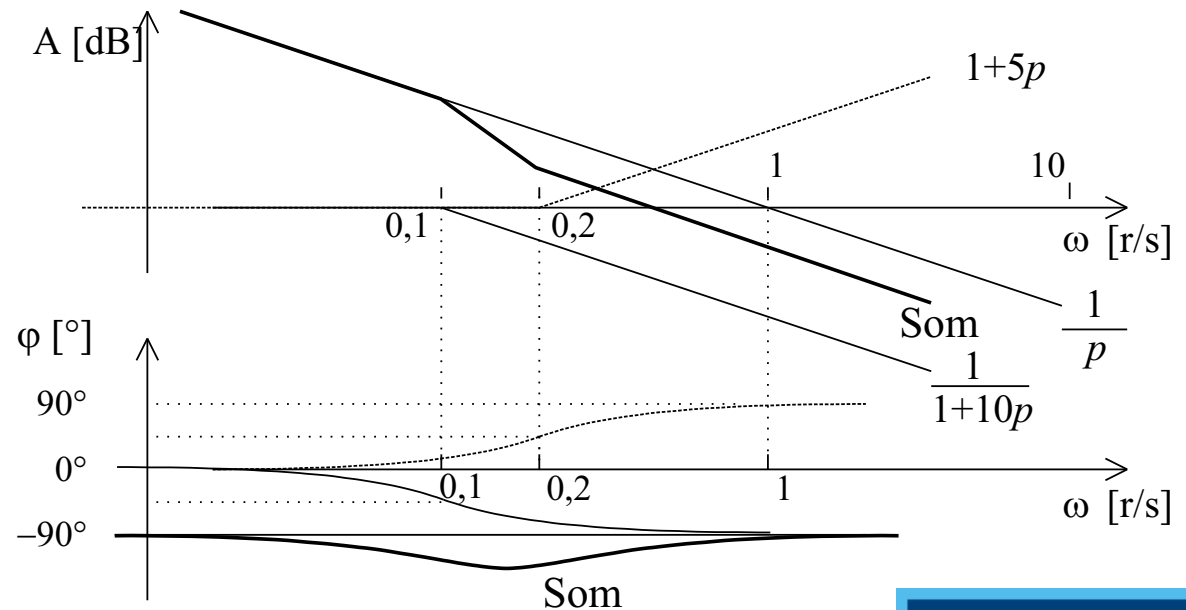
- **Bode-diagram van willekeurig systeem**

- Bode-diagram systeem = som Bode-diagramma deelsystemen

$$G(p) = \frac{A}{B \cdot C} \Rightarrow \begin{array}{l} 20 \log G(j\omega) \\ \angle G(j\omega) \end{array} = \begin{array}{l} 20 \log(|\frac{A}{B \cdot C}|) \\ = \angle(\frac{A}{B \cdot C}) \end{array} = \begin{array}{l} 20 \log |A| + 20 \log(|\frac{1}{B}|) + 20 \log(|\frac{1}{C}|) \\ = \angle A + \angle(\frac{1}{B}) + \angle(\frac{1}{C}) \end{array}$$

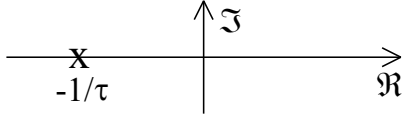
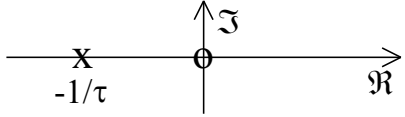
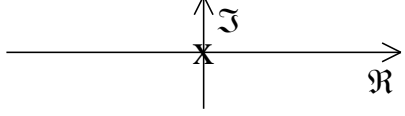
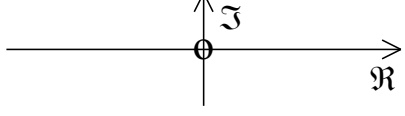
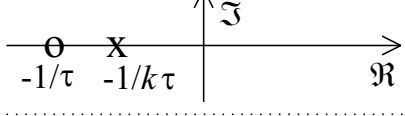
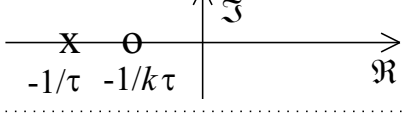
- voorbeeld:

$$G(p) = \frac{(1 + 5p)}{p(1 + 10p)}$$



Samenvatting (2)

- Samenvatting nulpunten-polen-beeld

	$TF =$	
Eerste orde met integrerende werking	$\frac{K}{1 + \tau p}$	
Eerste orde met differentiërende werking	$\frac{K \tau p}{1 + \tau p}$	
Zuivere integrator	$\frac{1}{\tau p}$	
Zuivere differentiator	τp	
'Lag'-compensator * $k > 1$	$K \frac{1 + \tau p}{1 + k \tau p}$	
'Lead'-compensator * $k > 1$	$K \frac{1 + k \tau p}{1 + \tau p}$	

(*) Zie later.