Regeltechniek

Les 2: Signaaltransformaties

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen
ESAT – Departement Elektrotechniek
KU Leuven, Belgium

Regeltechniek: Tijdschema Hoorcolleges

- **Hoorcolleges: maandag 8:25 – 10:25**
  - 29/09: Les 1
  - 06/10: Les 2
  - 13/10: Les 3
  - 20/10: geen les
  - 27/10: Les 4
  - 03/11: Les 5
  - 10/11: geen les
  - 17/11: Les 6
  - 24/11: Les 7
  - 01/12: Les 8 & 10
  - 08/12: Les 9
  - 15/12: Les 11

Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1:** Systeemtheorie
  - Les 1: Inleiding en modelvorming
  - Les 2: Signaaltransformaties
  - Les 3: Systemen van eerste orde
  - Les 4: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd
- **Deel 2:** Analoge regeltechniek
  - Les 5: De regelkring
  - Les 6: Het wortellijnendiagram
  - Les 7: De klassieke regelaars
  - Les 8: Voorbeelden en toepassingen
  - Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
  - Les 10: Speciale regelstructuren
  - Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

Inleiding (1)

- **Differentiaalvergelijkingen**
  - “klassieke” beschrijving gedrag/evolutie van systeem (in tijd)
  - verband tussen ingangs- en uitgangssignalen van systeem
  - voorbeeld: elektrische capaciteit

$$V(t) = V(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

- **Transfertfunctie (TF)**
  - “beknopte” beschrijving van systeemgedrag
  - algebraisch verband tussen ingangs- en uitgangssignalen van systeem (= zonder afgeleiden of integralen)

Inleiding (2)

Laplace-transformatie

Differentiaalvergelijking $\longrightarrow$ Transfertfunctie

- **Laplace-transformatie**

  = integraaltransformatie

  – zet differentiaalvergelijking om in transfertfunctie

  – kan gebruikt worden om differentiaalvergelijkingen op te lossen

  – geeft inzicht in frequentie-gedrag van systeem

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Definitie (1)

- **Laplace-transformatie**
  - Laplace-getransformeerde van functie $f(t)$

$$\boxed{F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt}$$

  - *p* = Laplace-variabele
  - enkel gedefinieerd als $f(t)e^{-pt}$ convergeert
  - *eenzijdige* Laplace-transformatie veronderstelt $f(t)$ causaal:

$$f(t) = 0, \ t < 0$$

KU LEUVEN

Definitie (2)

- **Inverse Laplace-transformatie**
  - invers Laplace-getransformeerde van functie $F(p)$

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\left\{F(p)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt}dp}$$

  - integraal langs verticale lijn ($\mathrm{Re}(p) = a$) in complexe vlak
  - enkel gedefinieerd als $F(p)e^{pt}$ tweezijdig convergeert
- **Laplace-transformatiepaar**

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

KU LEUVEN

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Voorbeelden (1)

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

- **Dirac-impuls**
  - definitie Dirac-impuls: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{voor} \quad t = 0, \\ 0 & \text{voor} \quad t \neq 0. \end{cases}$
  - oppervlak onder functie kan niet worden berekend (resultaat $0 \cdot \infty$ is onbepaald) en wordt daarom gedefinieerd als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \equiv 1$$

  - Laplace-getransformeerde:

$$L\{\delta(t)\} = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-p\cdot 0}dt + \int_{0^+}^{\infty} 0 \cdot e^{-pt}dt = 1 + 0$$

Voorbeelden (2)

$$a \leftrightarrow \frac{a}{p}$$

- **Stapfunctie**
  - definitie stapfunctie: $f(t) = \begin{cases} a & \text{voor} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{voor} \quad t < 0. \end{cases}$
  - bij eenzijdige Laplace-transformatie kunnen we stapfunctie als constante functie beschouwen:

$$L\{f(t)\} = L\{a\} = \int_0^\infty a e^{-pt} dt = a \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^\infty = \frac{a}{p}$$

  - Laplace-getransformeerde is enkel gedefinieerd voor $p > 0$

Voorbeelden (3)

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-a}$$

- **Exponentiële functie**
  - definitie: $f(t) = e^{at}$ met *a* constant reëel getal
  - Laplace-transformatie:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{(a-p)t} dt = \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-a}$$

  - Laplace-getransformeerde is enkel gedefinieerd voor $p > a$

Voorbeelden (4)

$$t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}$$

- **Talud- of rampfunctie**
  - definitie: $f(t) = t$
  - Laplace-transformatie:

$$L\{t\} = \int_0^\infty te^{-pt}dt = \int_0^\infty td\left(\frac{e^{-pt}}{-p}\right) = \left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt = 0 + \frac{1}{p}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p^2}$$

  - Laplace-getransformeerde is enkel gedefinieerd voor $p > 0$
- **Veeltermfunctie**
  - definitie: $f(t) = t^n$
  - Laplace-transformatie:

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{p^n}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

  - enkel gedefinieerd voor $p > 0$

Voorbeelden (5)

$$\cos at \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + a^2}$$

$$\sin at \leftrightarrow \frac{a}{p^2 + a^2}$$

- **Sinusoidale functie**
  - definities:

$$f(t) = \cos at$$

$$f(t) = \sin at$$

  - Laplace-getransformeerden kunnen berekend worden via dubbele partiële integratie

$$L\{\cos at\} = \frac{1}{p} - \frac{a^2}{p^2} L\{\cos at\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty \sin at \; e^{-pt} dt = \frac{a}{p} L\{\cos at\} = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

KU LEUVEN

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Eigenschappen (1)

- **Leariteit**
  - Laplace-getransformeerde van gescaleerde functie = gescaleerde Laplace-getransformeerde
  - Laplace-getransformeerde van som van functies = som van Laplace-getransformeerden

$$L\left\{a.f\left(t\right)+b.g\left(t\right)\right\}=a.L\left\{f\left(t\right)\right\}+b.L\left\{g\left(t\right)\right\}=aF(p)+bG(p)$$

met *a*, *b* willekeurige constanten

  - lineariteit kan gebruikt worden om Laplace-transformatie te berekenen voor functies waar Laplace-integraal moeilijk te berekenen is, bv.

$$L\{\cosh at\}=L\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\}=\frac{1}{2}L\{e^{at}\}+\frac{1}{2}L\{e^{-at}\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]=\frac{p}{p^2-a^2}$$

met $p>|a|$

Eigenschappen (2)

- **Differentiatietheorema**
  - Laplace-getransformeerde van afgeleide functie = vermenigvuldiging met *p* in Laplace-domein:

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(o)$$

  - Bewijs: zie cursustekst
  - Voorbeeld: Laplace-getransformeerde van sinus berekenen op basis van Laplace-transformatie van cosinus

$$\frac{d\cos at}{dt} = -a\sin at \;\; \text{of} \;\; \sin at = -\frac{1}{a}\frac{d\cos at}{dt}$$

$$\Leftrightarrow L\{\sin at\} = -\frac{1}{a}L\left\{\frac{d\cos at}{dt}\right\} = -\frac{1}{a}\left(p\cdot\frac{p}{p^2+a^2} - 1\right) = \frac{a}{p^2+a^2}$$

KU LEUVEN

Eigenschappen (3)

- **Integratietheorema**
  - Laplace-getransformeerde van geïntegreerde functie = deling door *p* in Laplace-domein:

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad \int f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$$

  - Bewijs: zie cursustekst

Eigenschappen (4)

- **Eindwaardetheorema**
  - eindwaarde (= steady-state waarde, evenwichtswaarde) van functie = limiet *p* x Laplace-getransformeerde voor *p* ⟶ 0

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

  - Bewijs: zie cursustekst
- **Beginwaardetheorema**
  - beginwaarde van functie = limiet *p* x Laplace-getransformeerde voor *p* ⟶ ∞

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad \lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0)$$

KU LEUVEN

Eigenschappen (5)

- **Schaalfactortheorema**
  - laat toe om tijdbasis om te rekenen naar andere tijdseenheid

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \ \ \text{dan} \quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

- **Eerste verschuivingstheorema**

  = theorema van complexe translatie = modulatie-theorema

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \ \ \text{dan} \ \ e^{at} \ f(t) \leftrightarrow F(p-a)$$

- **Tweede verschuivingstheorema**

  = theorema van reële translatie (enkel indien causaal!)

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \ \ \text{dan} \quad f(t-a) \leftrightarrow e^{-ap} F(p)$$

Eigenschappen (5)

- **Vermenigvuldiging met *t***

  = theorema van complexe differentiatie

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad t f(t) \leftrightarrow -\frac{dF(p)}{dp}$$

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

- **Deling door *t***

  = theorema van complexe integratie

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \;\; \text{dan} \quad \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(u)du$$

- **Convolutie**

$$\text{Indien} \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \text{ en } \quad g(t) \leftrightarrow G(p) \;\; \text{dan} \quad f(t) * g(t) \leftrightarrow F(p) \cdot G(p)$$

KU LEUVEN

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Inverse Laplace-transformatie (1)

- **Berekening inverse Laplace-transformatie**
  - definitie:

$$L^{-1}\{F(p)\} = f(t)$$

  - berekeningswijze: deel functie $F(p)$ op in som van elementaire Laplace-getransformeerden en gebruik lineariteit

$$L^{-1}\{c_1F(p) + c_2G(p)\} = c_1L^{-1}\{F(p)\} + c_2L^{-1}\{G(p)\} = c_1f(t) + c_2g(t)$$

  - Laplace-getransformeerde = rationele functie van p

$$F(p) = \frac{T(p)}{N(p)}$$

  - rationele functie opdelen in som van elementaire breuken = *splitsing in partieelbreuken*

Inverse Laplace-transformatie (2)

- **Splitsing in partieelbreuken**
  - partieelbreuksplitsing voor enkelvoudige pool p_i

$$\frac{A_i}{p-p_i} \quad \text{met} \quad A_i = \lim_{p \to p_i} (p-p_i)F(p)$$

  - partieelbreuksplitsing voor *r*-voudige pool p_i

$$\frac{A_0}{(p-p_i)^r} + \frac{A_1}{(p-p_i)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{r-1}}{p-p_i} \quad \text{met} \quad A_j = \frac{1}{j!} \lim_{p \to p_j} \frac{d^j}{dp^j} \left[(p-p_i)^r F(p) \right]$$

(*berekening coëfficiënten* A_j: noemers elimineren en veeltermcoëfficiënten linker- en rechterlid gelijk stellen)

  - partieelbreuksplitsing voor complex toegevoegde polen $a \pm jb$

$$\frac{Bp + C}{(p-a)^2 + b^2}$$

(*berekening coëfficiënten B, C:* coëfficiënten (co)sinusterm linker- en rechterlid gelijk stellen)

- **Voorbeelden:** zie cursustekst

KU LEUVEN

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Analyse van continue systemen

- **Differentiaalvgl. → algebraïsche vgl.**
  - differentiaalvergelijking:

$$D_y\left|y(t)\right| = D_x\left|x(t)\right|$$

$$D_y = b_n\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + b_0 \quad \text{en} \quad D_x = a_n\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_0$$

Laplace-transformatie:

$$\begin{aligned} b_n \quad & \left[p^nY(p) - y(0)p^{n-1} - y'(0)p^{n-2} - \cdots - y^{n-1}(0)\right] \\ & + b_{n-1}\left[p^{n-1}Y(p) - y(0)p^{n-2} - y'(0)p^{n-3} - \cdots - y^{n-2}(0)\right] \\ & + \cdots + b_1\left[pY(p) - y(0)\right] + b_0Y(p) \\ & = a_n\left[p^nX(p) - x(0)p^{n-1} - x'(0)p^{n-2} - \cdots - x^{n-1}(0)\right] \\ & \quad + a_{n-1}\left[p^{n-1}X(p) - x(0)p^{n-1} - x'(0)p^{n-2} - \cdots - x^{n-2}(0)\right] \\ & \quad + \cdots + a_1\left[pX(p) - x(0)\right] + a_0X(p). \end{aligned}$$

  - algebraïsche vergelijking:

$$Y(p) = H(p)X(p) + E(p) \quad \text{met} \quad H(p) = \frac{a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}{b_np^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_0}$$

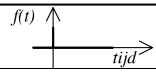
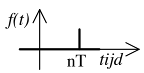
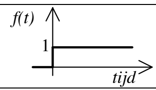
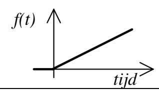
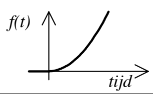
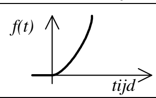
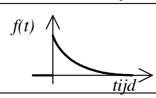
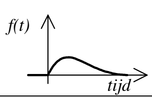
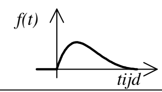
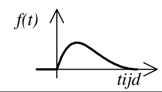
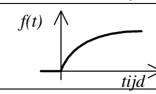
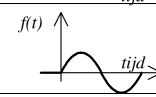
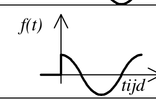
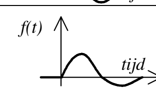
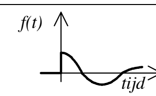
Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Transformatietabel

- **Theorie 1**

	$f(t)$ (grafisch)	$f(t)$ (formule)	$F(p)$
1.		$\delta(t)$	1
2.		$\delta(t-nT)$	e^{-nTp}
3.		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
4.		$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
5.		$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{p^3}$
6.		$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
7.		$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
8.		$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
9.		$\frac{1}{2}t^2e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^3}$
10.		$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
11.		$(1-e^{-at})u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
12.		$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
13.		$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
14.		$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
15.		$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Fourier-transformatie (1)

- **Definitie**
  - Fourier-getransformeerde van signaal $f(t)$

$$\boxed{F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \Re(\omega) + j\Im(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}$$

  - ω = frequentievariabele
  - geeft inzicht in frequentie-inhoud van signalen en frequentie-gedrag van systemen
  - *tweezijdige* transformatie
  - verband met Laplace-transformatie (voor causale signalen):

$$F(\omega) = F(p)|_{p=j\omega}$$

KU LEUVEN

Fourier-transformatie (2)

- **Inverse**
  - definitie:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

  - berekeningswijze:
    - partieelbreuksplitsing
    - lineariteit
    - transformatietabel
- **Lineariteit:**

$$\mathcal{F}\{a.f(t) + b.g(t)\} = a.\mathcal{F}\{f(t)\} + b.\mathcal{F}\{g(t)\}$$

Fourier-transformatie (3)

- **Voorbeeld 1: Dirac-puls**
  - berekening:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-0}^{+0} \delta(t) e^{-j\omega 0} dt \\
&= \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt \\
&= 1
\end{aligned}
$$

  - besluit: Dirac-puls bevat alle frequenties met amplitude 1 ($\rightarrow$ vlak frequentiespectrum)

Fourier-transformatie (4)

- **Voorbeeld 2: Stap**
  - definitie stap:

$$E(t) = \begin{cases} 1, & \text{voor} \quad t > 0 \\ 1/2, & \text{voor} \quad t = 0 \\ 0, & \text{voor} \quad t < 0 \end{cases}$$

  - berekening:

$$\begin{aligned} F\{E(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_0^\infty = [0 - \frac{1}{-j\omega}] = \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

  - besluit: stap bevat alle frequenties met afnemende amplitude

Fourier-transformatie (5)

- **Voorbeeld 3: Exponentiële functie**
  - definitie exponentiële functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & \text{voor} \quad t > 0 \\ 1/2, \text{voor} \quad t = 0 & \\ 0, & \text{voor} \quad t < 0 \end{cases}$$

  - berekening:

$$\begin{aligned} F\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{(a-j\omega)t} dt \\ &= \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a - j\omega} \Big|_0^{\infty} = [0 - \frac{1}{a - j\omega}] = \frac{1}{j\omega - a} \end{aligned}$$

KU LEUVEN

Fourier-transformatie (6)

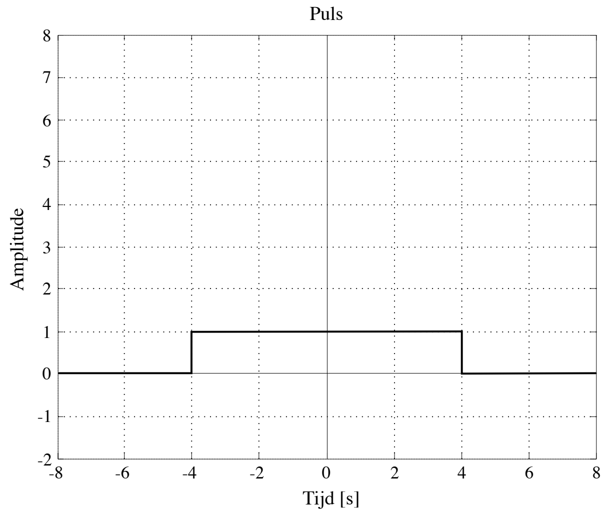
- **Voorbeeld 4: Puls**
  - definitie pulsfunctie:

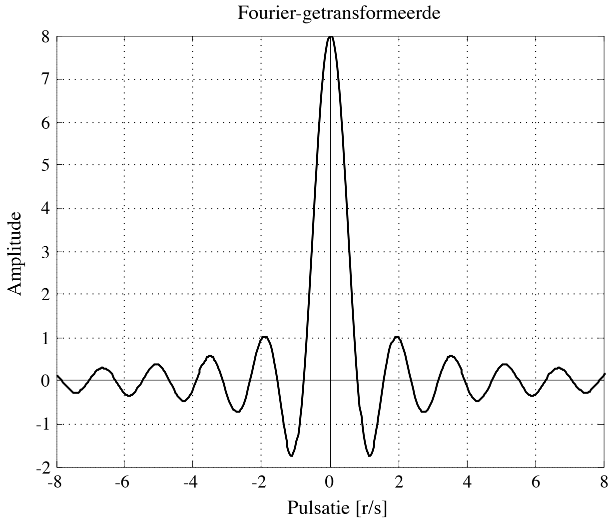
$$f(t) = \begin{cases} A, & \text{voor} \quad |t| < a \\ A/2, & \text{voor} \quad |t| = a \\ 0, & \text{voor} \quad |t| > a \end{cases}$$

  - berekening:

$$\begin{aligned} F\{f(t)\} &= \int_{-a}^{a} A e^{(-j\omega)t} dt = A \frac{e^{(-j\omega)t}}{-j\omega} \Big|_{-a}^{a} \\ &= A \frac{e^{(-j\omega)a} - e^{(j\omega)a}}{-j\omega} = \frac{2A\sin(\omega a)}{\omega} \end{aligned}$$

  - besluit: spectrum puls = sinc-functie





KU LEUVEN

Les 2: Signaaltransformaties

- **De Laplace-transformatie** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 2]
  - Inleiding
  - Definitie
  - Voorbeelden
  - Eigenschappen
  - De inverse Laplace-transformatie
  - Laplace-transformatie bij analyse van continue systemen
  - Transformatietabel
- **Fourier-transformatie en -reeksontwikkeling** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 6]
  - Fourier-transformatie
  - Fourier-reeksontwikkeling

KU LEUVEN

Fourier-reeksontwikkeling (1)

- **Definitie**
  - Fourier-reeksontwikkeling geeft frequentie-inhoud periodische signalen (Fouriertransformatie = onbepaald)
  - coëfficiënten Fourier-reeks worden berekend uit 1 periode *T*

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega_0 t)dt \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega_0 t)dt \ \text{ voor } \ k = 1, 2, 3, \ldots}$$

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi/T}$$

  - Fourier-reeks:

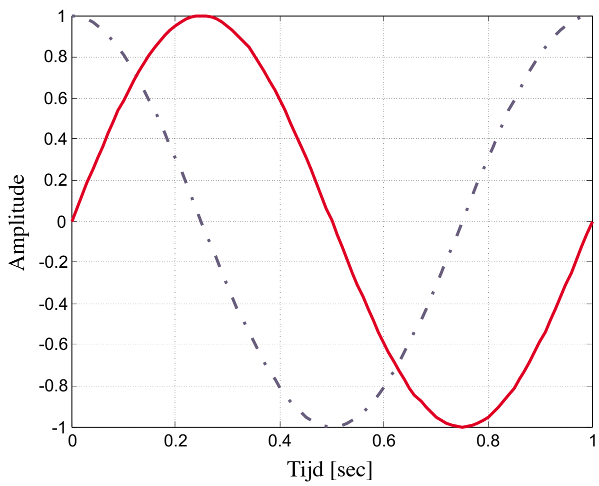
$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)].}$$

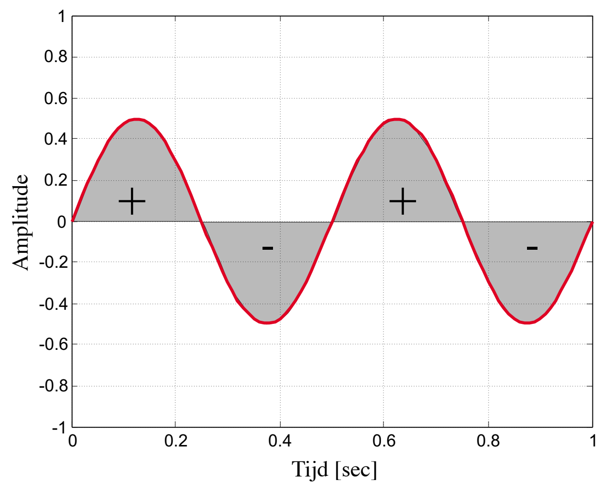
  - Fourier-som: $f_n(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)]$

Fourier-reeksontwikkeling (2)

- **Afleiding**
  - zie cursustekst
  - belangrijke eigenschap: integraal over 1 periode van product van verschillende sinussen en cosinussen = 0

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)dt = 0 \quad \text{voor} \quad k, l = 1, 2, \ldots$$



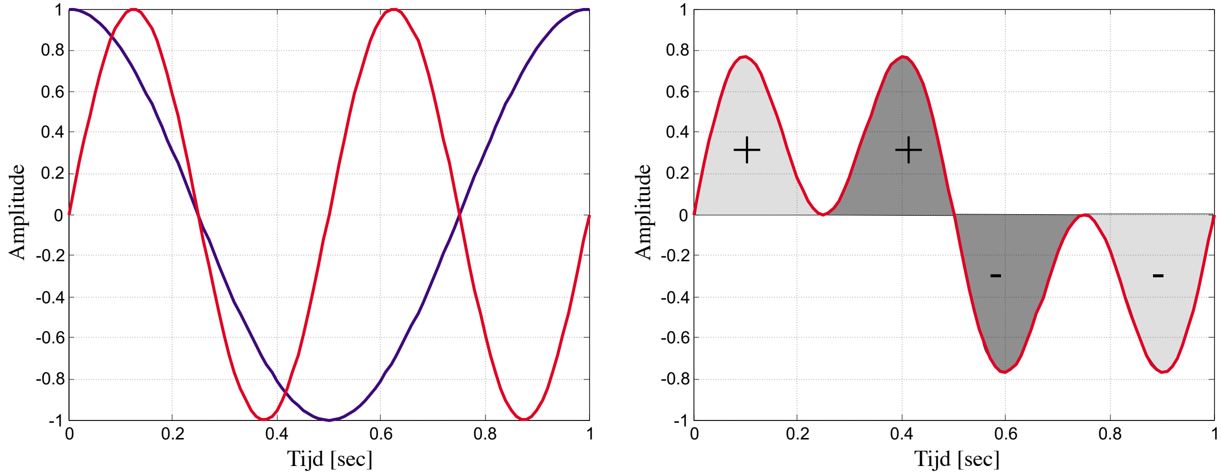


$$\text{vb.} \cos(2\pi t)$$
$$\sin(2\pi t)$$

Fourier-reeksontwikkeling (3)

- **Afleiding**
  - zie cursustekst
  - belangrijke eigenschap: integraal over 1 periode van product van verschillende sinussen en cosinussen = 0

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)dt = 0 \quad \text{voor} \quad k, l = 1, 2, \ldots$$

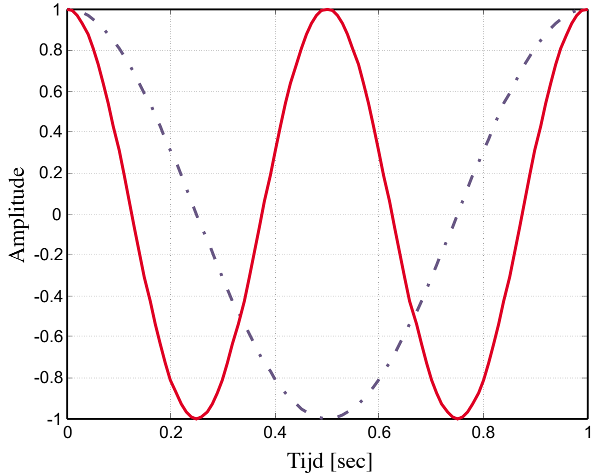


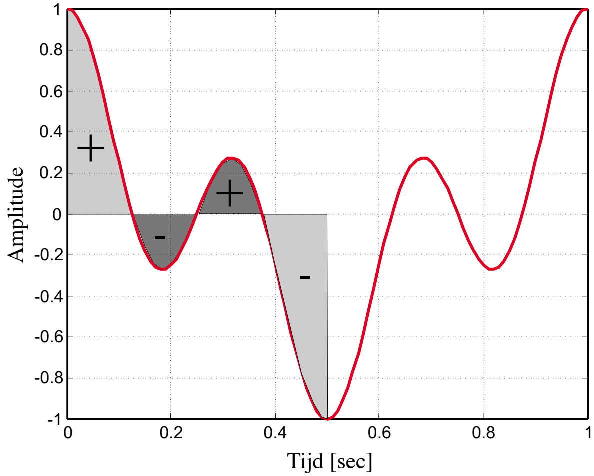
$$\text{vb.} \cos(2\pi t)$$
$$\sin(4\pi t)$$

Fourier-reeksontwikkeling (4)

- **Afleiding**
  - zie cursustekst
  - belangrijke eigenschap: integraal over 1 periode van product van verschillende sinussen en cosinussen = 0

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)dt = 0 \quad \text{voor} \quad k,l = 1,2,\ldots$$





$$\text{vb.} \cos(2\pi t)$$
$$\cos(4\pi t)$$

Fourier-reeksontwikkeling (5)

- **Voorbeeld 1: Blokgolf**
  - definitie blokgolf (met periode 1):

$$\text{Stel} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{voor} \quad 0 < t < 1/2 \\ 0, & \text{voor} \quad 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

  - Fourier-reekscoëfficiënten (bereken zelf!):

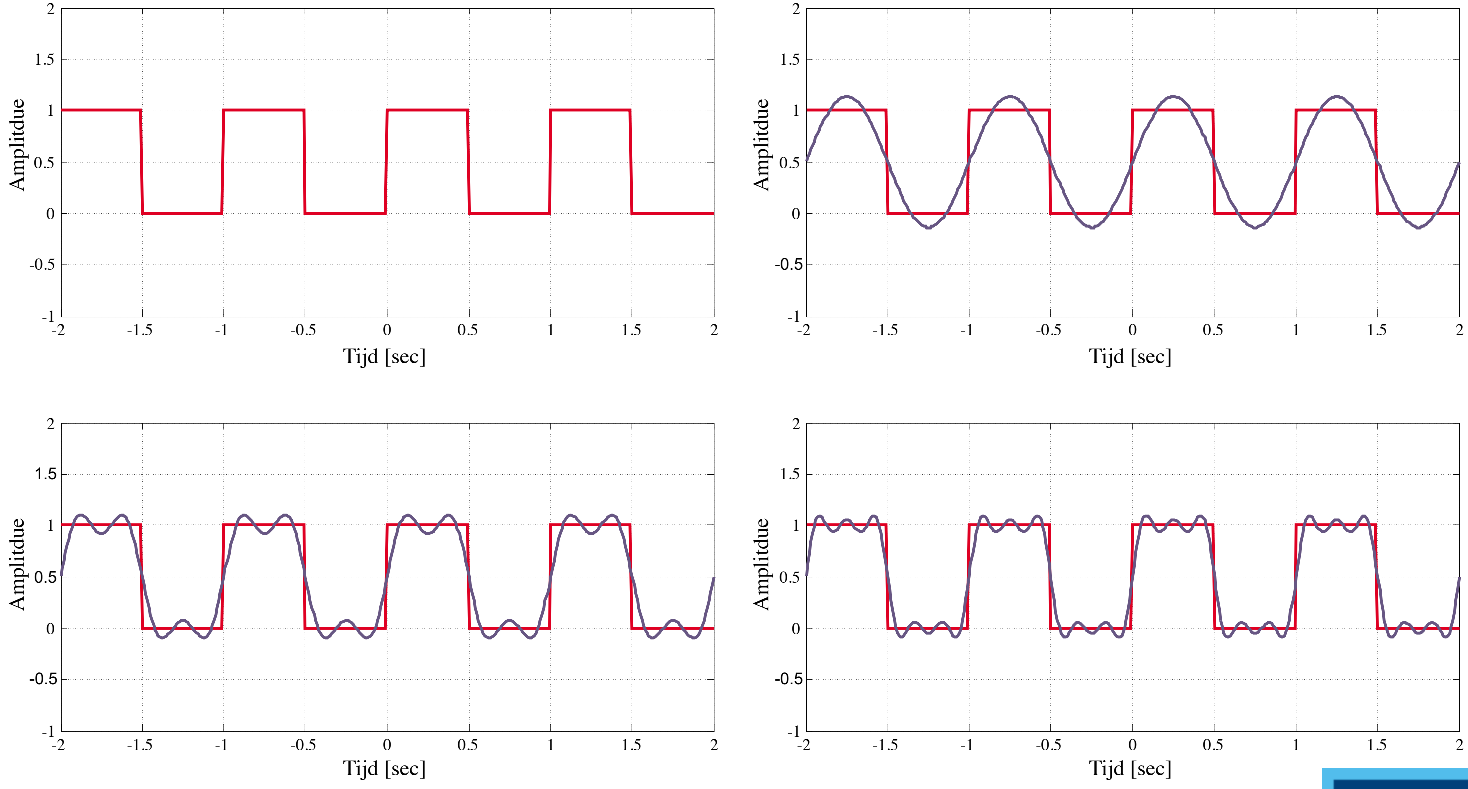
$$a_0 = 1, \quad a_{1,2,3,\ldots} = 0, \quad b_{2,4,6,\ldots} = 0,$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad b_5 = \frac{2}{5\pi}, \quad \ldots$$

  - besluit: blokgolf (oneven functie) is som van DC-component en oneindig veel sinus-functies

Fourier-reeksontwikkeling (6)

- **Voorbeeld 1: Blokgolf**
  - Fourier-sommen blokgolf (n = 1, 3, 5)



Fourier-reeksontwikkeling (7)

- **Voorbeeld 2: Zaagtand**
  - definitie zaagtand (met periode 1):

$$f(t) = t, \text{voor} \;\; 0 < t < 1$$

  - Fourier-reekscoëfficiënten (bereken zelf!):

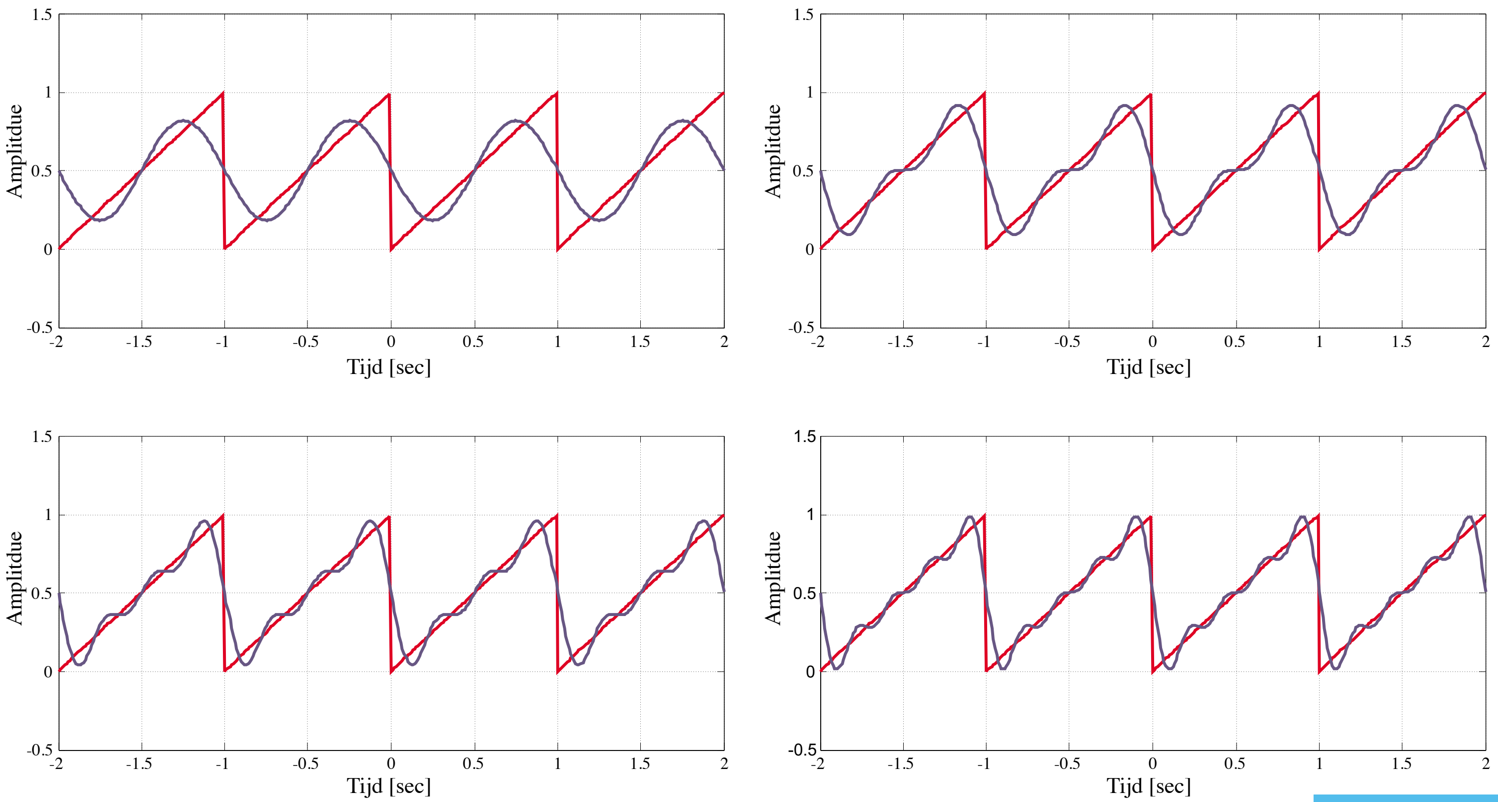
$$a_0 = 1, \quad a_{1,2,3,\ldots} = 0,$$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{1}{2\pi}, \quad b_3 = -\frac{1}{3\pi}, \quad \ldots$$

  - besluit: zaagtand (oneven functie) is verschil van DC-component en oneindig veel sinus-functies

Fourier-reeksontwikkeling (8)

- **Voorbeeld 2: Zaagtand**
  - Fourier-sommen zaagtand (n = 1, 2, 3, 4)



Fourier-reeksontwikkeling (9)

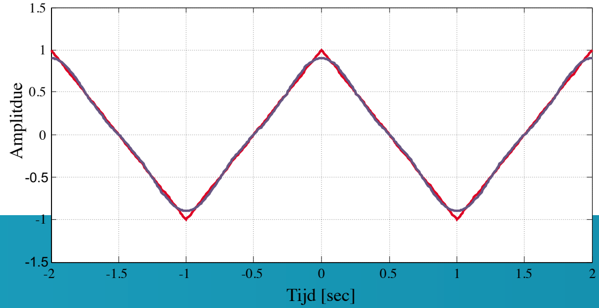
- **Voorbeeld 3: Driehoek**
  - definitie driehoek (met periode 2):

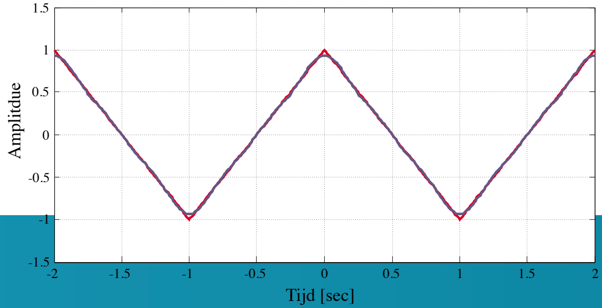
$$f(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & \text{voor} \quad 0 < t < 1 \\ 2t + 1, & \text{voor} \quad -1 < t < 0 \end{cases}$$

  - Fourier-reekscoëfficiënten (bereken zelf!):

$$b_{1,2,3,\ldots} = 0, \quad a_{0,2,4,\ldots} = 0 \;, \quad a_1 = \frac{8}{\pi^2} \;, \quad a_3 = \frac{8}{(3\pi)^2}, \quad a_5 = \frac{8}{(5\pi)^2}, \quad \ldots$$

  - besluit: zaagtand (even functie) is som van DC-component en oneindig veel cosinus-functies
  - Fourier-sommen driehoek (*n* = 3, 5)





Fourier-reeksontwikkeling (10)

- **Beschouwingen Fourier-reeksontwikkeling**
  - over het algemeen neemt bijdrage van hogere harmonischen in Fourier-reeks af: Fourier-som is dan goede benadering
  - voor even functies zijn sinus-coëfficiënten gelijk aan 0, voor oneven functies zijn cosinus-coëfficiënten gelijk aan 0
  - willekeurig signaal kan worden ontbonden in som van even en oneven functie:
    - even functie = som van cosinussen (+ DC-component)
    - oneven functie = som van sinussen