



# Meet- en Regeltechniek

## Les 11: Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen  
**ESAT** – Departement Elektrotechniek  
KU Leuven, Belgium



# Meet- en Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**

- Les 1: Inleiding en modelvorming
- Les 2: Systemen van eerste orde
- Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Deel 2: Analoge regeltechniek**

- Les 4: De regelkring
- Les 5: Het wortellijnendiagram
- Les 6: Oefeningen wortellijnendiagram
- Les 7: De klassieke regelaars
- Les 8: Regelaarontwerp + oefeningen
- Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
- Les 10: Speciale regelstructuren
- Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

- **Deel 3: Digitale regeltechniek**

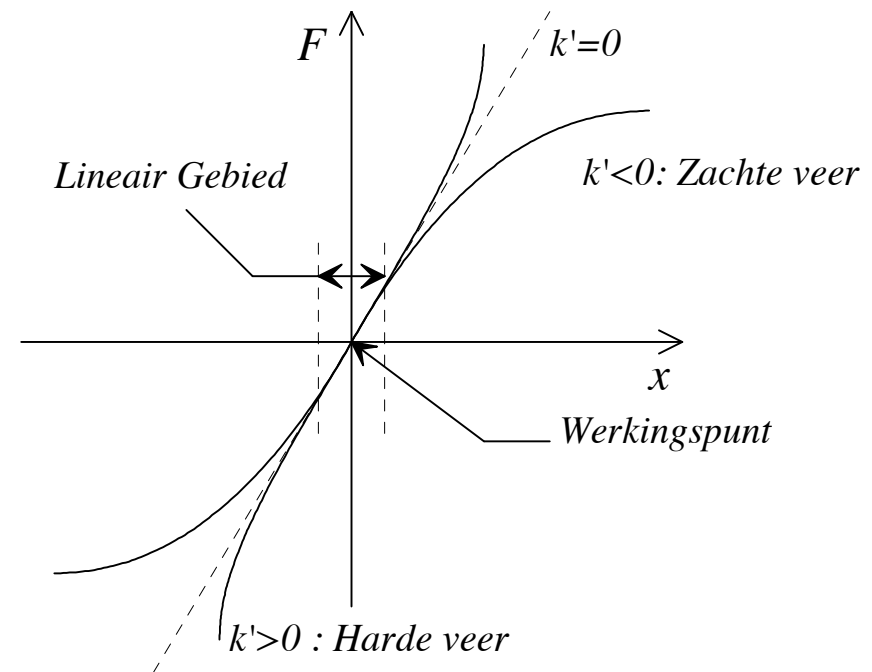
- Les 12: Het discreet systeemgedrag & het discreet equivalent
- Les 13: De discrete regelkring & de toestandsregelaar

# Les 11: Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars

- **Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars** [Baeten, REG2, Deel 2]
  - Niet-lineaire elementen
  - De fasevlakmethode
  - De beschrijvende-functiemethode
  - Simulatie
  - Temperatuurregeling met aan-uit regelaar

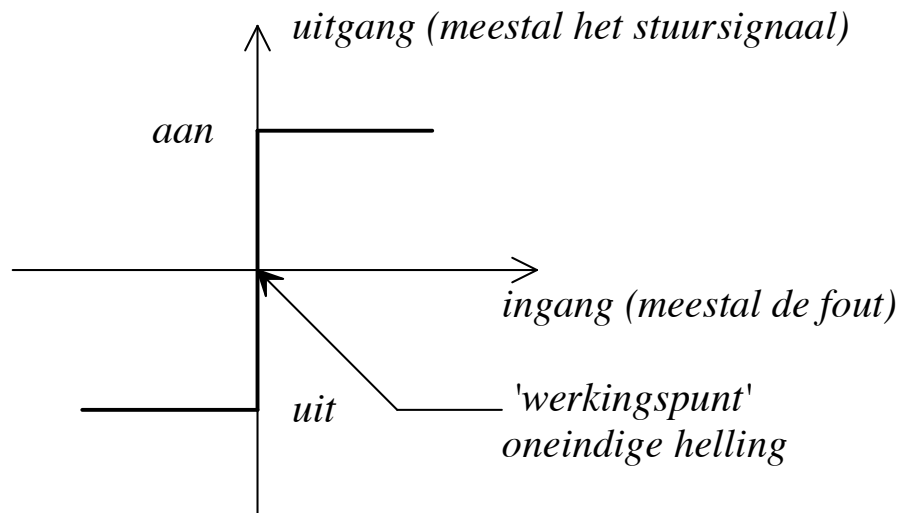
# Niet-lineaire elementen: Inleiding (1)

- Twee soorten systemen:
  - lineair
  - niet-lineair
- Studiemethoden voor niet-lineaire methoden zijn beperkt en delicaat!
- In vele gevallen lineariseren we niet-lineaire systemen: we beschouwen enkel kleine veranderingen rond een bepaald werkingspunt
- Voorbeeld (veer):  $F(t) = kx(t) + k'x^3(t) \approx kx(t)$



# Niet-lineaire elementen: Inleiding (2)

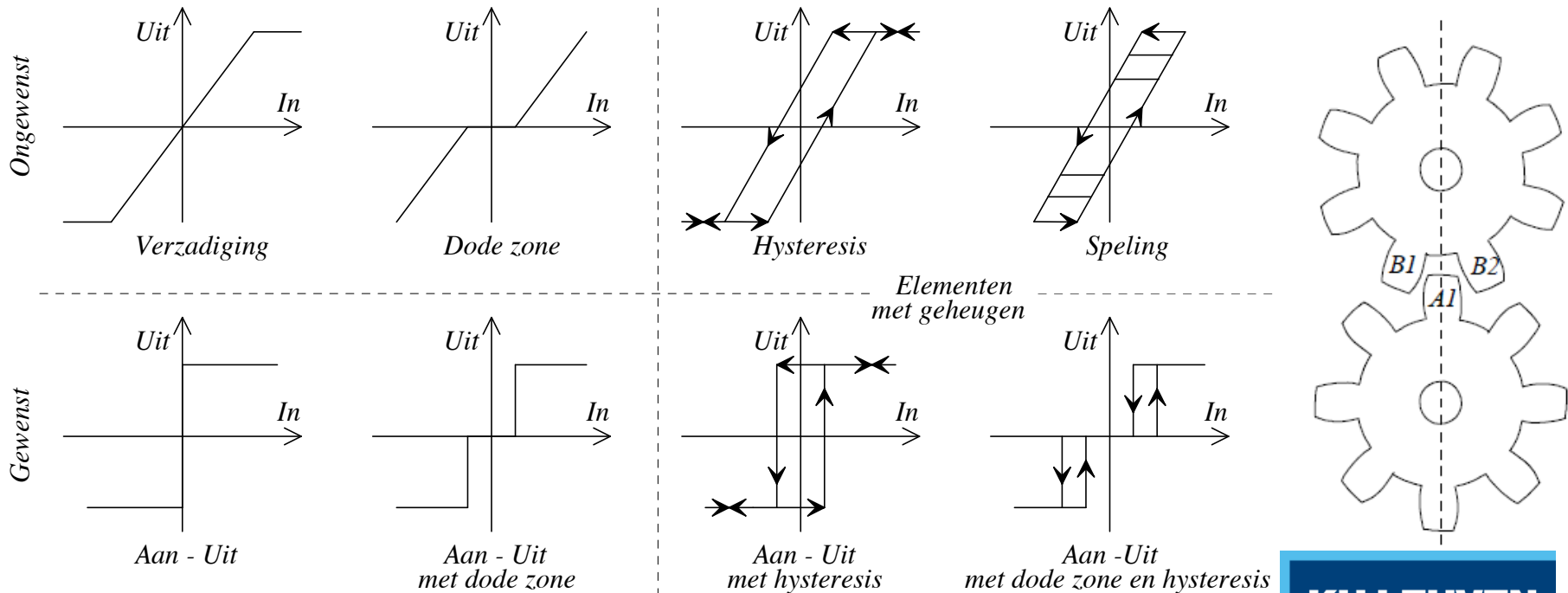
- Linearisatie niet altijd mogelijk!
- Voorbeeld: aan-uit element



- In dit geval nieuwe rekenmethoden gebruiken!
  - fasevlak methode
  - beschrijvende functiemethode
  - simulatiemethode

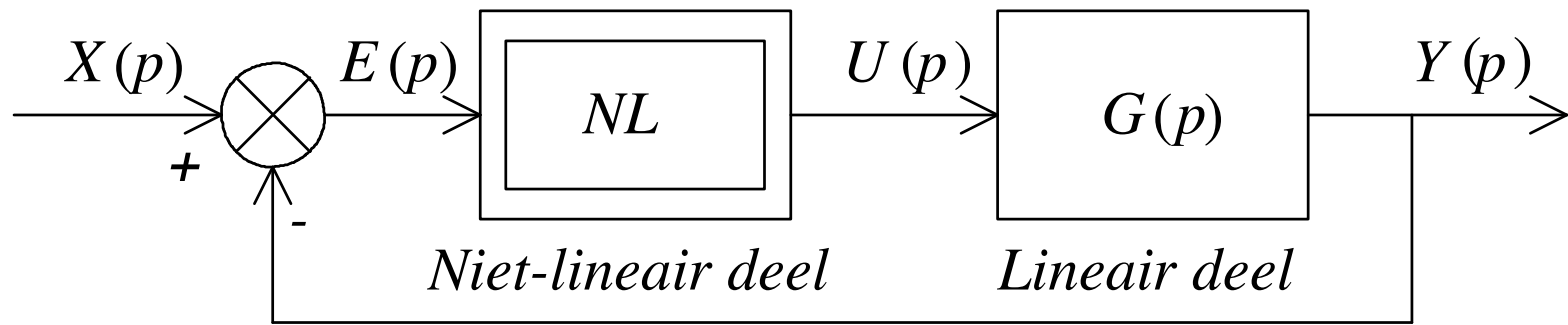
# Niet-lineaire elementen: Soorten niet-lineariteiten

- Twee soorten niet-lineariteiten:
  - welbewuste niet-lineariteiten (gewenst), bv. aan-uit regelaar
  - parasitaire niet-lineariteiten (ongewenste), bv. verzadiging, dode zone, coulomb wrijving, 'backlash', ...



# Niet-lineaire elementen: Herleiden blokschema's (1)

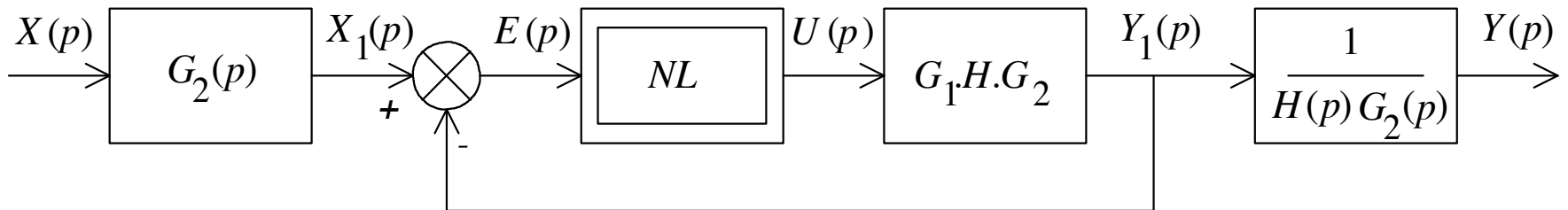
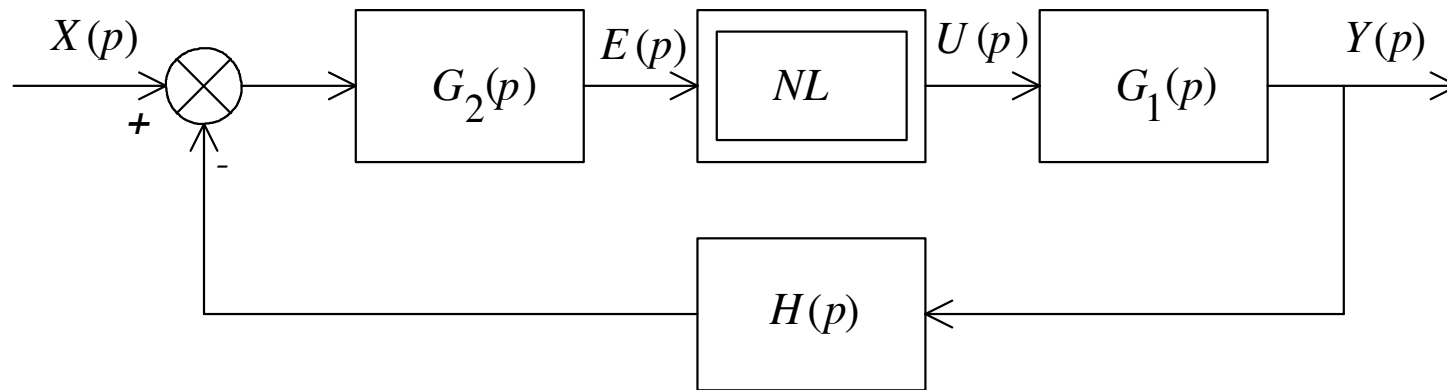
- Vaak slechts 1 systeemcomponent met niet-lineair gedrag
- “Herleid blokschema” splitst niet-lineair deel af van lineair deel



- Opgelet:
  - superpositieregel geldt niet bij niet-lineaire elementen!
  - bijgevolg: bij verschuivingen in blokschema moet niet-lineair element hetzelfde ingangssignaal behouden

# Niet-lineaire elementen: Herleiden blokschema's (2)

- Voorbeeld:





# Niet-lineaire elementen: Stabiliteit

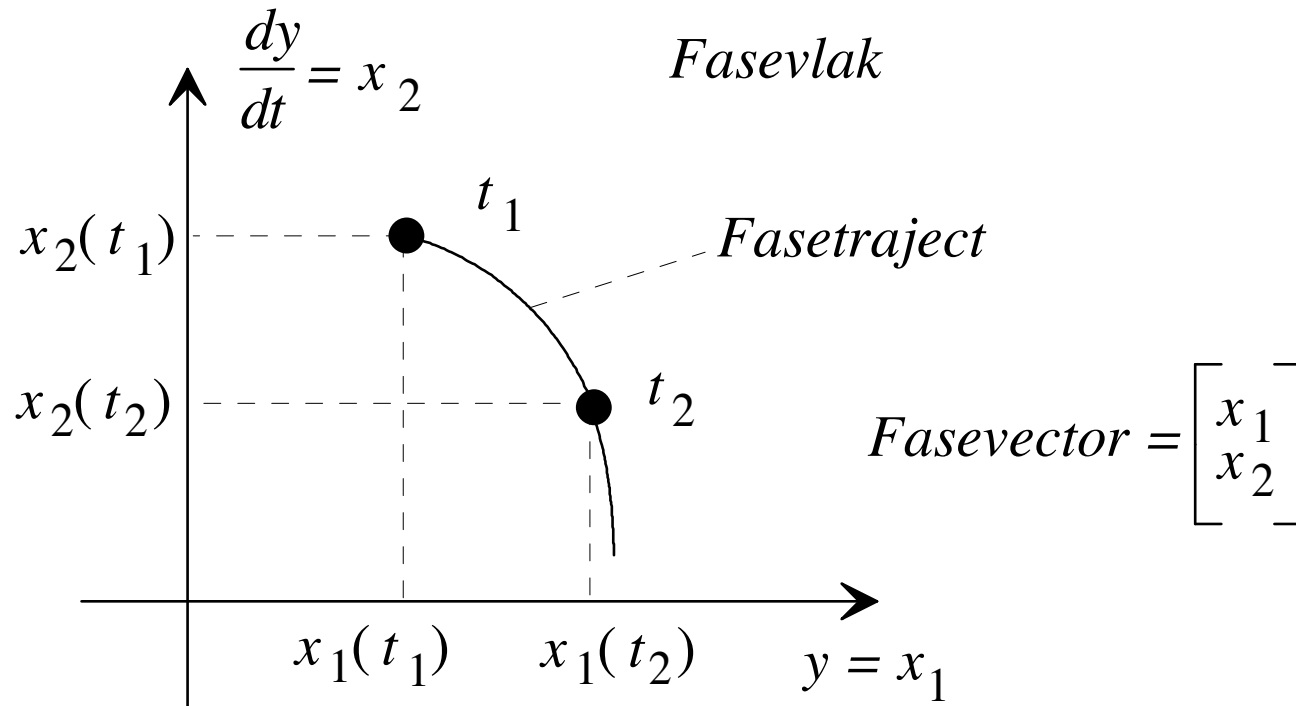
- Eigenschappen niet-lineaire systemen verschillen sterk van lineaire systeemeigenschappen
  - **niet-lineair systeem**: respons en stabiliteit hangen af van ingangsamplitude (foutsignaal) en beginvoorwaarden
  - **linear systeem**: respons en stabiliteit inherent aan systeem, onafhankelijk van signalen
- Stabiliteit niet-lineair systeem: **stabiele limietcyclus**
  - = zelfonderhoudende oscillatie met vaste amplitude en frequentie
  - = gewenst stabiel werkingsregime van niet-lineaire regelkring

# Les 11: Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars

- **Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars** [Baeten, REG2, Deel 2]
  - Niet-lineaire elementen
  - De fasevlakmethode
  - De beschrijvende-functiemethode
  - Simulatie
  - Temperatuurregeling met aan-uit regelaar

# Methode 1: fasevlakmethode (1)

- Niet-lineaire systemen worden beschreven d.m.v. differentiaalvergelijken met tijdsvariante coëfficiënten
- Fasevlakmethode toont variatie van eerste afgeleide van uitgangsvaariabele als functie van uitgangsvaariabele



# Methode 1: fasevlakmethode (2)

- Fasevlakmethode = exacte grafische methode om responsie te bepalen voor 2<sup>de</sup> (of 3<sup>de</sup>) orde systemen
- Fasevlak is een bijzonder geval van toestandsvlak
- Fasetraject wordt altijd getekend vertrekkend van toestand op ogenblik  $t = 0$

$$\frac{d^2y}{dt} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1 u \rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{d^2y}{dt} = \dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 x_1 + b_1 u \end{cases}$$

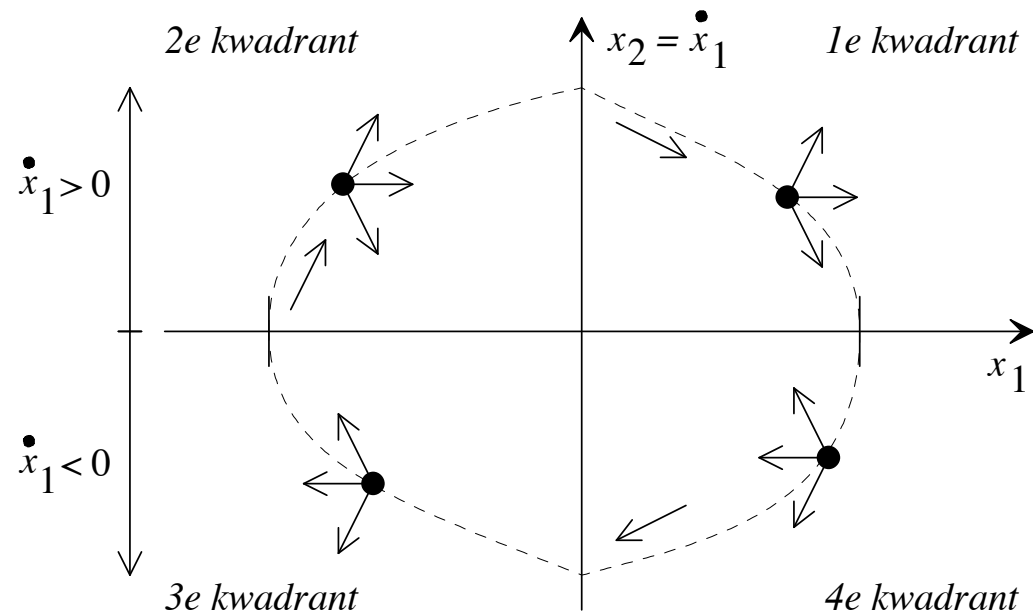
# Methode 1: fasevlakmethode (3)

- Tekenregels:

- fase-traject snijdt de  $x$ -as loodrecht:

$$S = \frac{dx_2}{dx_1}, x_2 = 0; x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

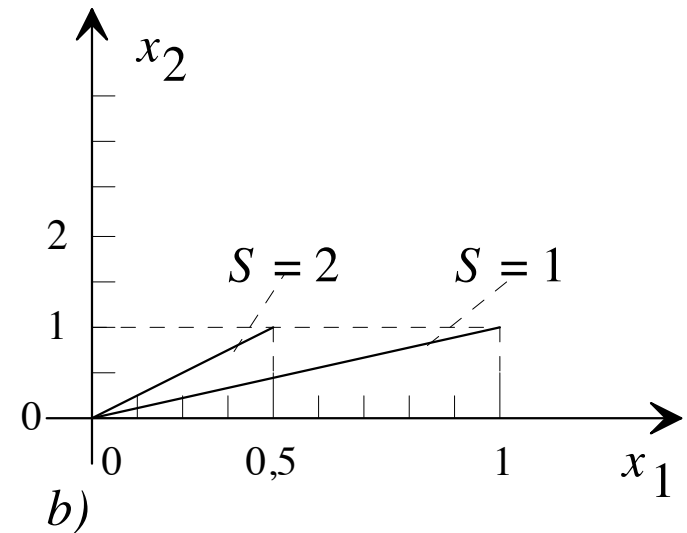
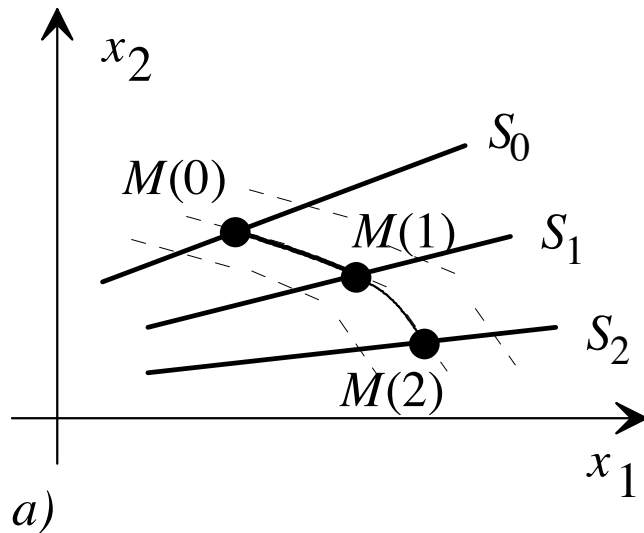
- fase-traject altijd uurwijzerszin (zie voorbeeld)
- gebruik isoclines: verzameling punten waar fase-traject zelfde helling heeft



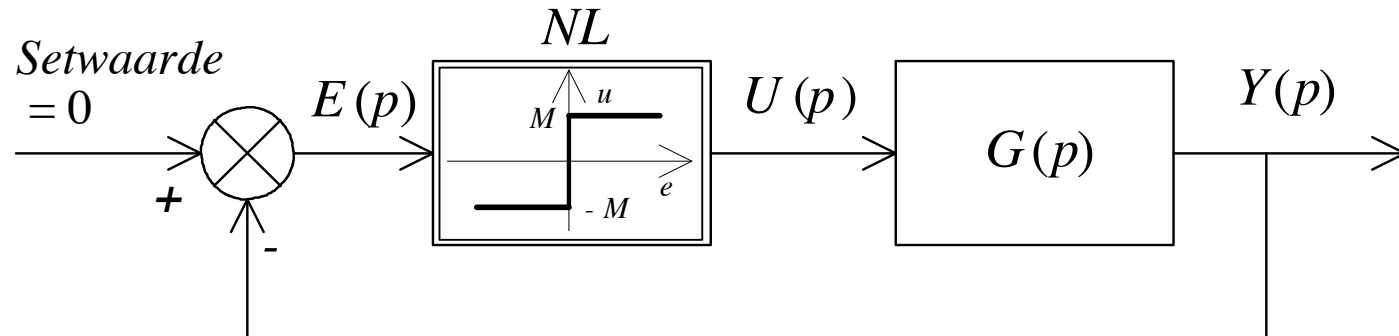
# Methode 1: fasevlakmethode (4)

- Isoclines
  - worden gedefinieerd door

$$S = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}$$



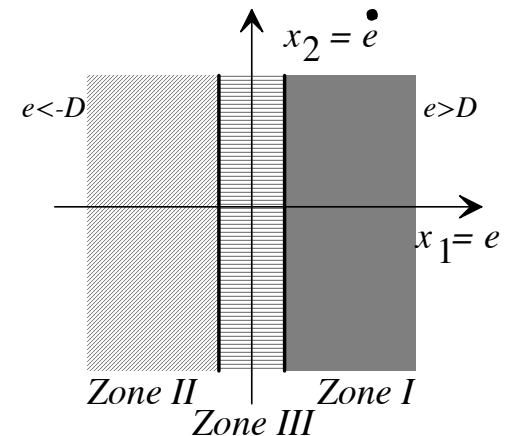
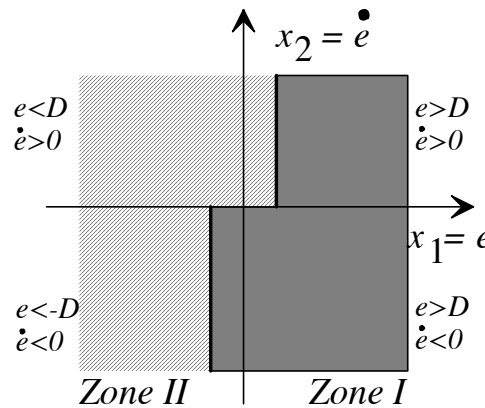
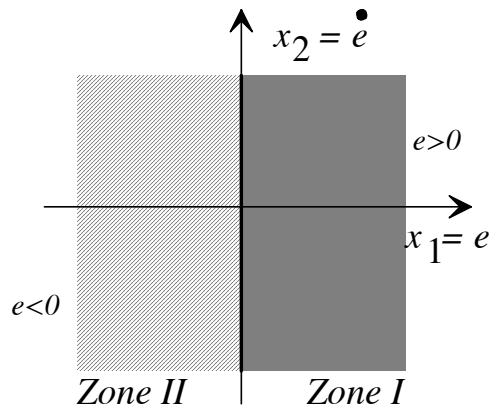
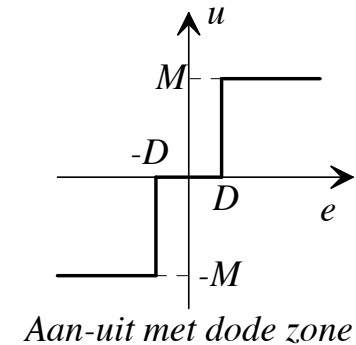
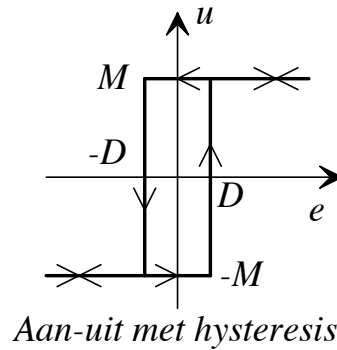
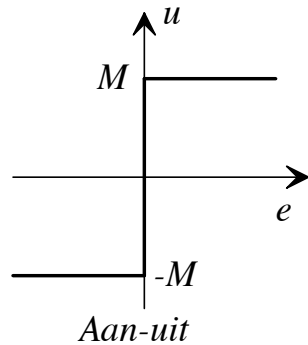
# Methode 1: invloed aan-uit element (1)



- Aan-uit element zorgt ervoor dat regelkring op twee manieren kan werken (met 2 verschillende stuursignalen)
- Neem  $x_1 = e(t), x_2 = \frac{de(t)}{dt}$  en teken fasevlak
- Aan-uit element (= hier als regelaar gebruikt) verdeelt fasevlak  $\rightarrow$  commutatielijnschakelijns

# Methode 1: invloed aan-uit element (2)

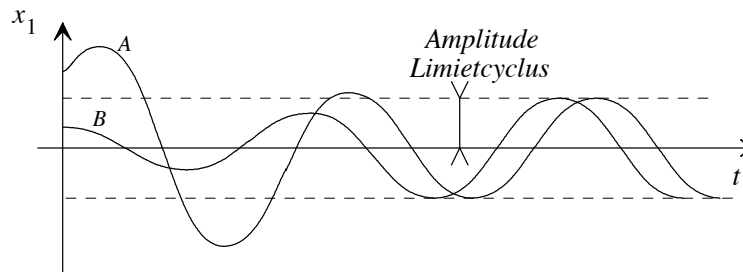
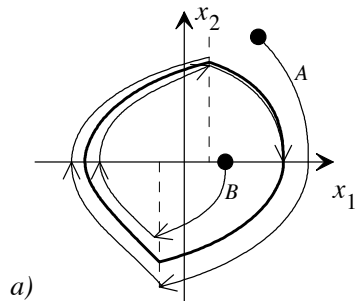
- Type aan-uit element bepaalt ligging schakellijnen



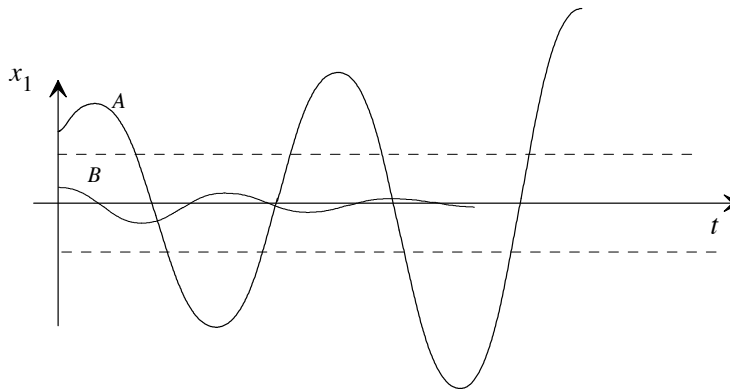
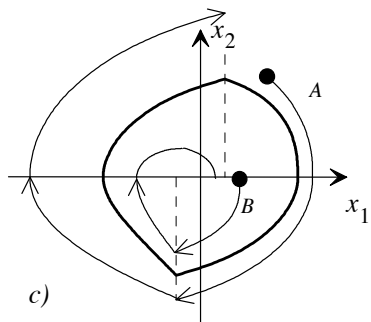


# Methode 1: limietcyclus (1)

- Limietcyclus
  - zichzelf onderhoudende oscillatie eigen aan NL systemen
  - zichtbaar in fasevlak als gesloten kromme waarrond fasetraject spiraliseert

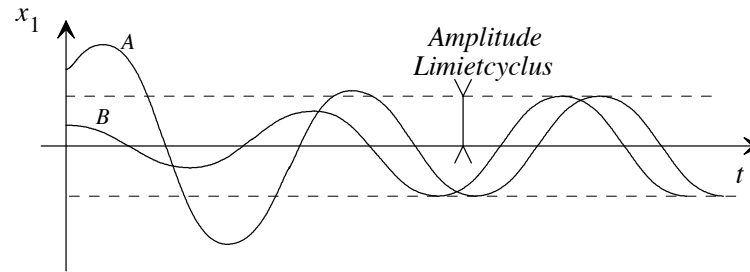
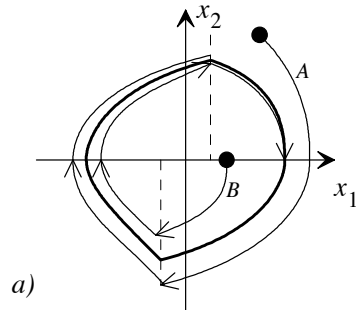


Stabiel

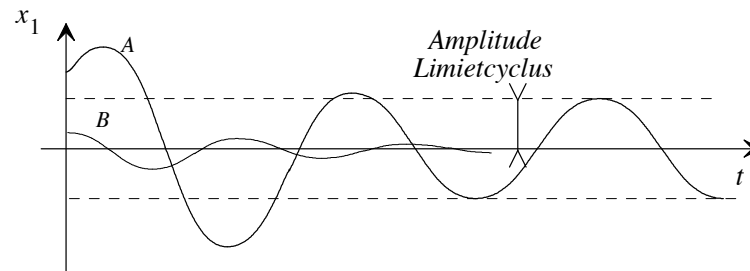
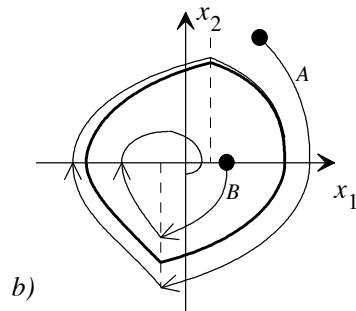


Instabiel

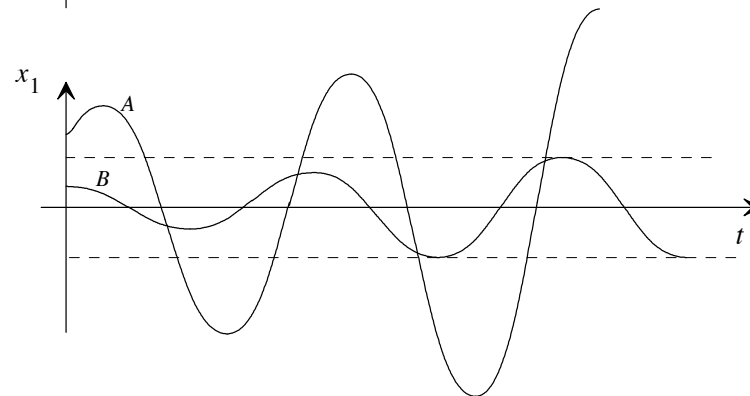
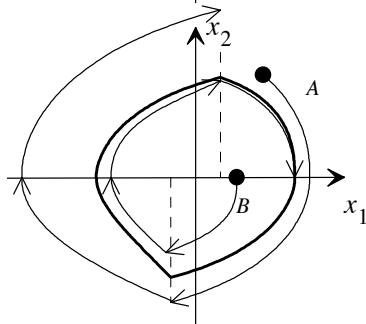
# Methode 1: limietcyclus (2)



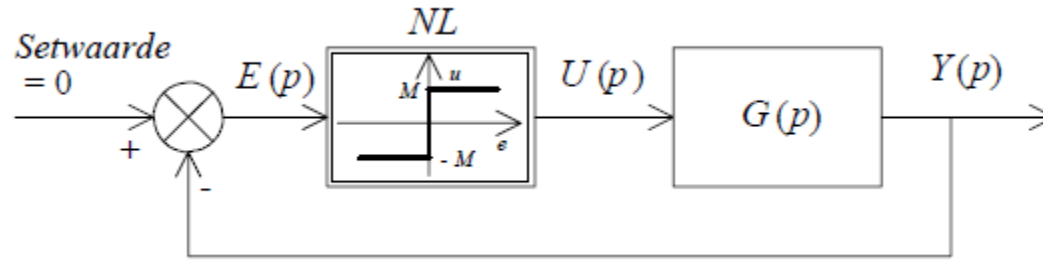
Stabiel



Semi-stabiel



# Methode 1: voorbeeld (1)



$$G(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)} \rightarrow \tau \frac{d^2 y(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} = Ku(t)$$

$$y(t) = -e(t)$$

$$\tau \frac{d^2 e(t)}{dt} + \frac{de(t)}{dt} = -Kf[e(t)] \rightarrow \begin{cases} \tau \frac{d^2 e(t)}{dt} + \frac{de(t)}{dt} = KM & \text{voor } e(t) < 0 \\ \tau \frac{d^2 e(t)}{dt} + \frac{de(t)}{dt} = -KM & \text{voor } e(t) > 0 \end{cases}$$

Beschouw gebied wanneer  $e(t) < 0$ ,  $x_1 = e(t)$ ,  $x_2 = \frac{de(t)}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-x_2 + KM}{\tau} \end{cases} \quad \text{of matricieel:} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KM}{\tau} \end{bmatrix}$$

# Methode 1: voorbeeld (2)

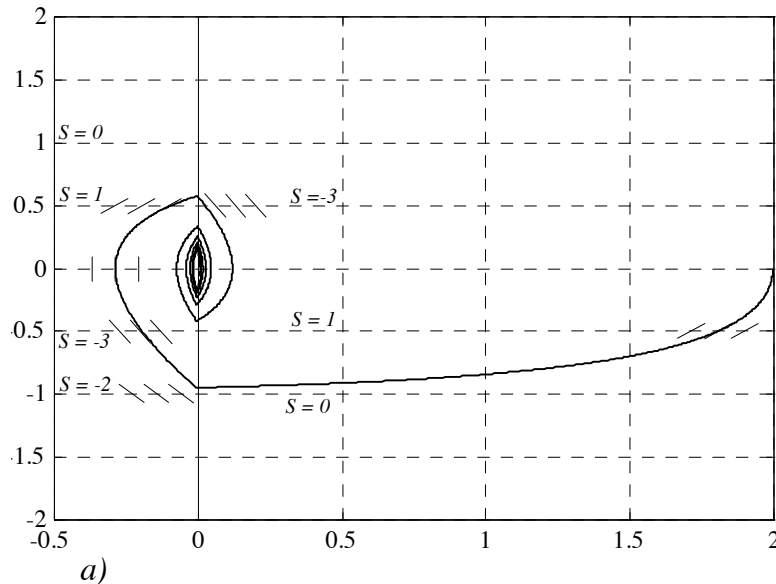
$$S = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + KM}{\tau x_2} \quad e(t) < 0$$

$$S = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 - KM}{\tau x_2} \quad e(t) > 0$$

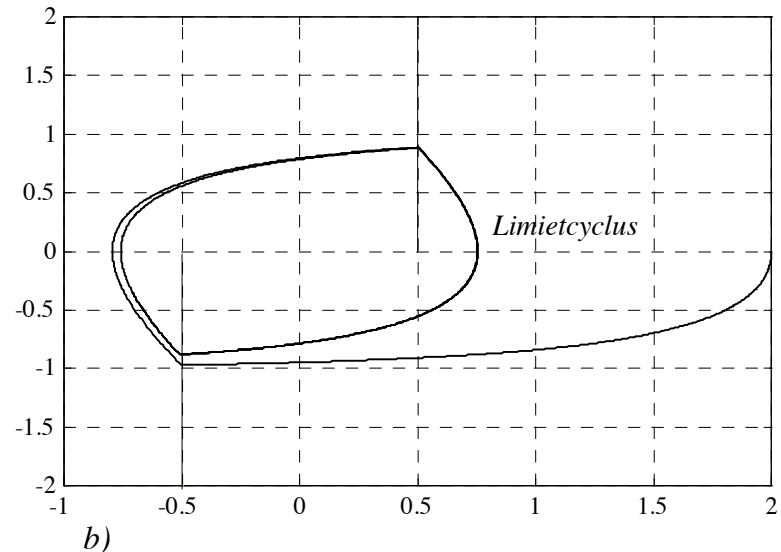
$$x_2 = \frac{1}{S+1} \text{ voor } e(t) < 0 \text{ en } x_2 = \frac{-1}{S+1} \text{ voor } e(t) > 0 \quad \text{met } M=K=1, \tau=1$$

$e(t) < 0$		$e(t) > 0$	
$S = 0$	$x_2 = 1$	$S = 0$	$x_2 = -1$
$S = 1$	$x_2 = 0,5$	$S = 1$	$x_2 = -0,5$
$S = 3$	$x_2 = 0,25$	$S = 3$	$x_2 = -0,25$
$S = -3$	$x_2 = -0,5$	$S = -2$	$x_2 = 1$
$S = -2$	$x_2 = -1$	$S = -3$	$x_2 = 0,5$
		$S = -5$	$x_2 = 0,25$

# Methode 1: voorbeeld (3)



aan-uit regelaar zonder hysteresis



Amplitude Limietcyclus  $\approx 0,75$

aan-uit regelaar met hysteresis

- Trade-off bij keuze hysteresisbreedte

- geen te hoge schakelfrequentie  $\rightarrow$  levensduur schakelelement (D niet te klein)
- amplitude van limietcyclus (= maximale fout) beperken  $\rightarrow$  kwalitatieve regeling (D niet te groot)

# Les 11: Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars

- **Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars** [Baeten, REG2, Deel 2]
  - Niet-lineaire elementen
  - De fasevlakmethode
  - De beschrijvende-functiemethode
  - Simulatie
  - Temperatuurregeling met aan-uit regelaar

# Methode 2: beschrijvende functiemethode (1)

- ook eerste harmonische of equivalente lineariseringsmethode genaamd
- niet beperkt tot 2<sup>de</sup> (of 3<sup>de</sup>) orde systemen
- Veronderstel zuiver sinusoidaal signaal voor  $e(t) = E_M \sin \omega t \Rightarrow u(t)$  niet meer zuiver sinusoidaal maar wel periodisch
- dus Fourier decompositie mogelijk

$$u(t) = u_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)]$$

met de eerste harmonische frequentie

$$u_1(t) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{waarbij } A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{en } \varphi = \text{bgtg} \left( \frac{b_1}{a_1} \right)$$

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt \quad \text{en} \quad b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T u(t) \cos(\omega t) dt$$

# Methode 2: beschrijvende functiemethode (2)

- Indien voldaan aan voorwaarden:
  - gemiddelde  $u_0 = 0$
  - Hogere harmonischen zijn te verwaarlozen ( $G(p)$  werkt als laagdoorlaat filter)
- Dan  $u(t) \cong u_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$
- Overdrachtsfunctie van niet-lineair element wordt

$$N = \frac{A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}{E_M \sin(\omega t)} = \frac{A_1}{E_M} e^{+j\varphi_1} = \frac{a_1}{E_M} + j \frac{b_1}{E_M}$$

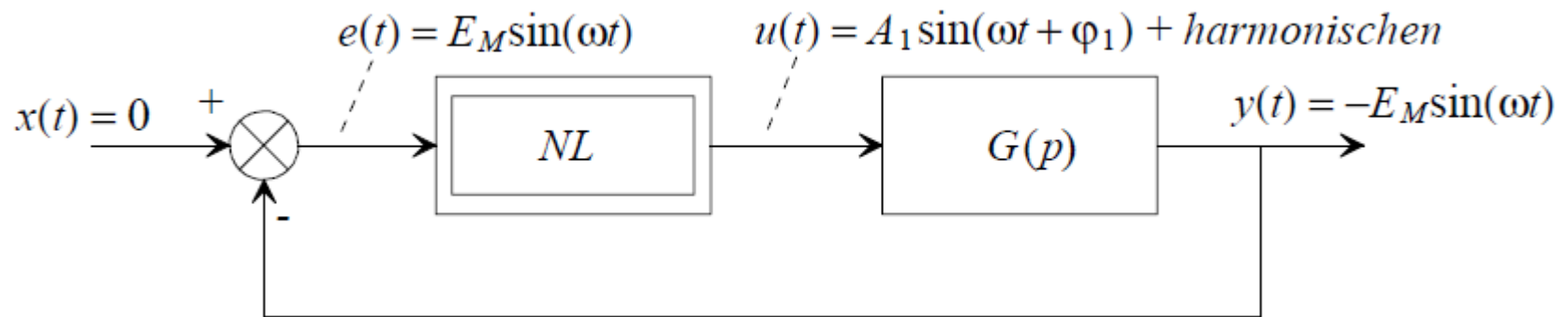
$$|N| = \frac{A_1}{E_M} \quad \text{en} \quad \angle N = \varphi_1$$

- $N =$  beschrijvende functie = afhankelijk van  $\omega$  en  $E_M$



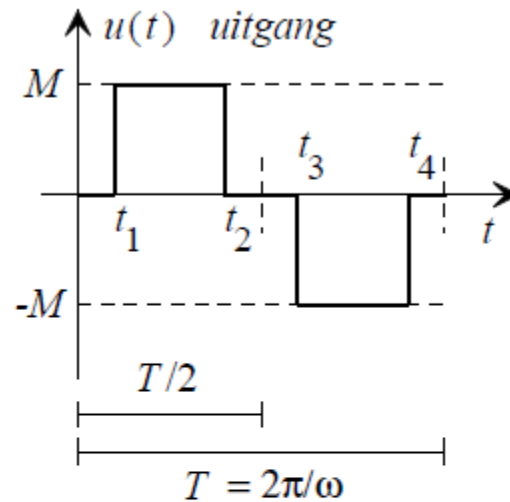
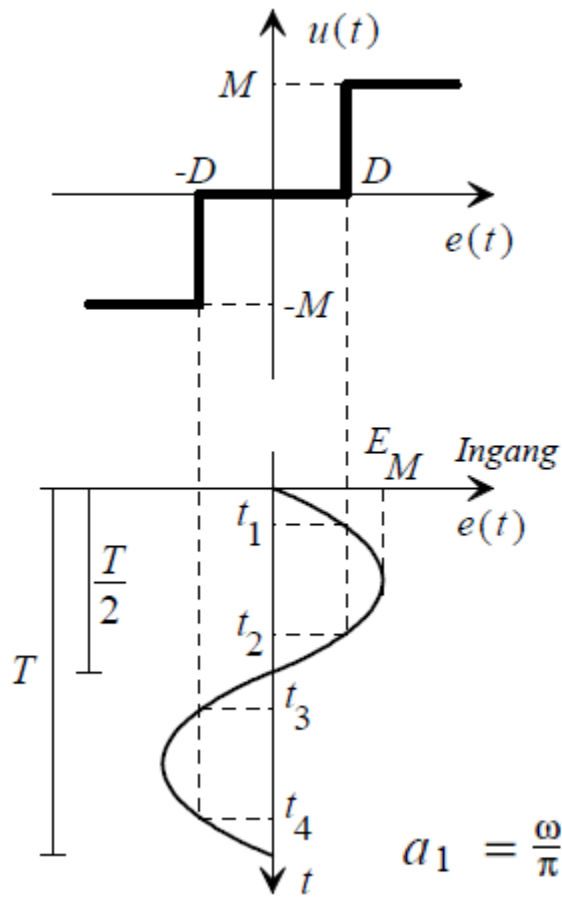
## Methode 2: beschrijvende functiemethode (3)

- Voorbeeld: regelsysteem met eenheidsterugkoppeling



# Methode 2: berekening (1)

- Voorbeeld: aan-uit element met dode zone



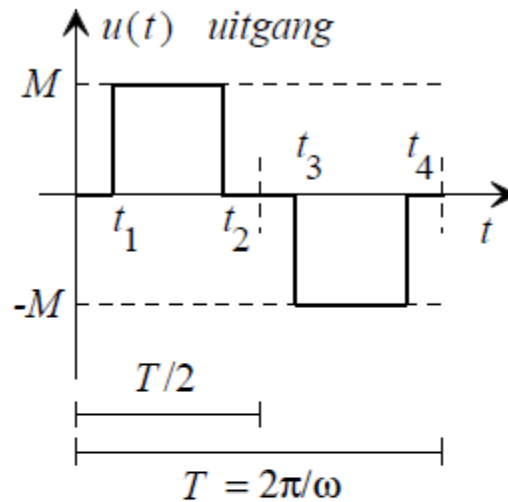
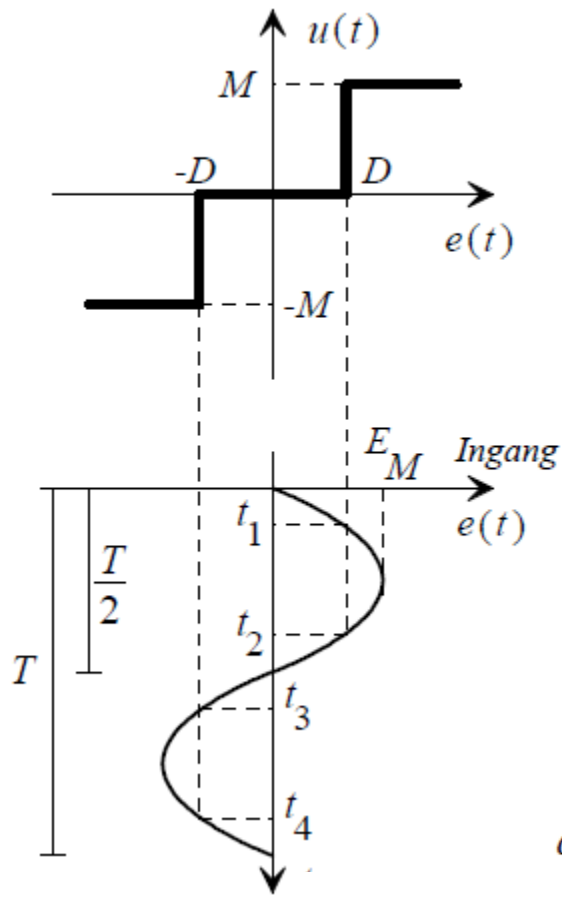
$$u_0 = 0$$

$u$  is oneven functie  $\rightarrow b_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{T/2} u(t) \sin(\omega t) dt = \frac{2\omega}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} M \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{2\omega M}{\pi} \left[ -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{2M}{\pi} [\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)]
 \end{aligned}$$

# Methode 2: berekening (2)

- Voorbeeld: aan-uit element met dode zone



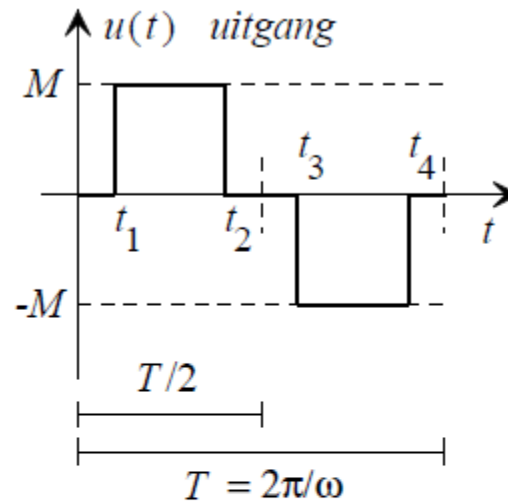
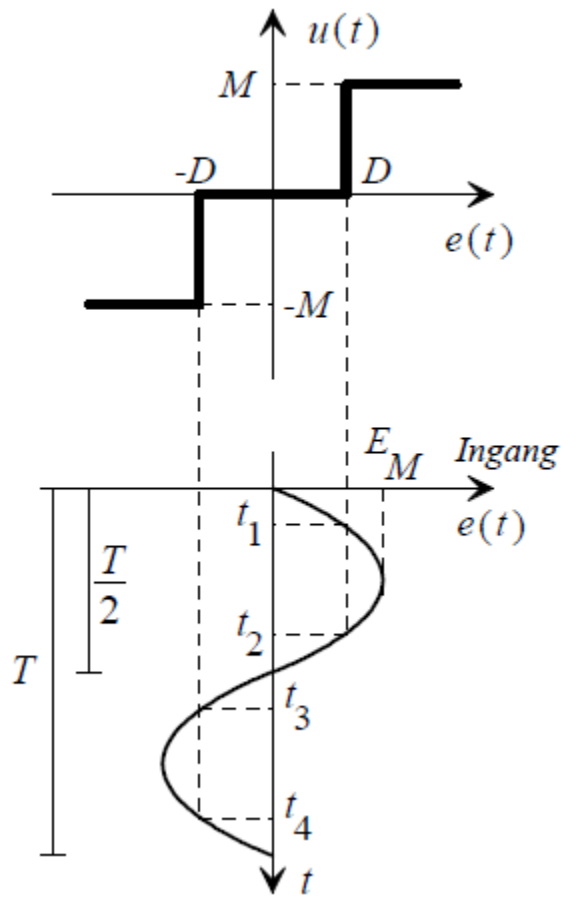
$t_1$  en  $t_2$  liggen symmetrisch rond  $\frac{T}{4}$   
 $\rightarrow \cos(\omega t_2) = -\cos(\omega t_1)$

$$a_1 = \frac{4M}{\pi} \cos(\omega t_1)$$

$$e(t_1) = E_M \sin(\omega t_1) = D \quad \text{of} \quad \sin(\omega t_1) = \frac{D}{E_M} \rightarrow \cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - \left(\frac{D}{E_M}\right)^2}$$

# Methode 2: berekening (3)

- Voorbeeld: aan-uit element met dode zone



Uiteindelijk bekomen we  $a_1 = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{E_M}\right)^2}$

Gecombineerd met  $b_1 = 0 \rightarrow A_1 = a_1$  en  $\varphi_1 = 0$  krijgen we

$$N = \frac{4M}{\pi E_M} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{E_M}\right)^2} \quad (\text{aan-uit met dode zone})$$

Voorwaarde  $E_M > D$  anders is  $N = 0$

# Methode 2: berekening (4)

- Voor zuiver aan-uit element (dode zone  $D = 0$ )

$$N = \frac{4M}{\pi E_M} \quad (\text{aan-uit element})$$

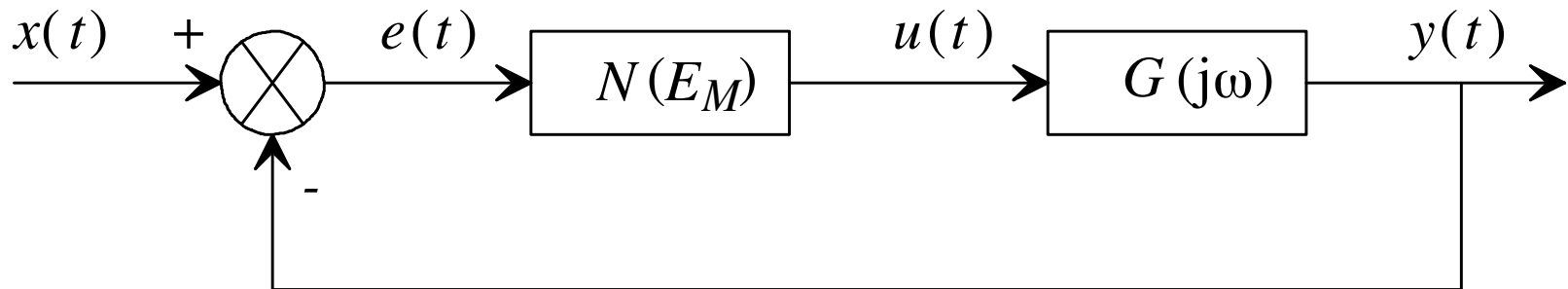
- Analoge redenering voor aan-uit element met hysteresis

$$N = \frac{4M}{\pi E_M} e^{-jbg \sin\left(\frac{D}{E_M}\right)} \quad (\text{aan-uit met hysteresis})$$

(afleiding: zie cursustekst)

# Stabiliteit van een teruggekoppeld systeem met niet-lineariteit (1)

- Substitutie van beschrijvende functie in regelkring:



– geslotenlus transfertfunctie:  $TF_{gl}(j\omega) = \frac{N(E_M)G(j\omega)}{1 + N(E_M)G(j\omega)}$

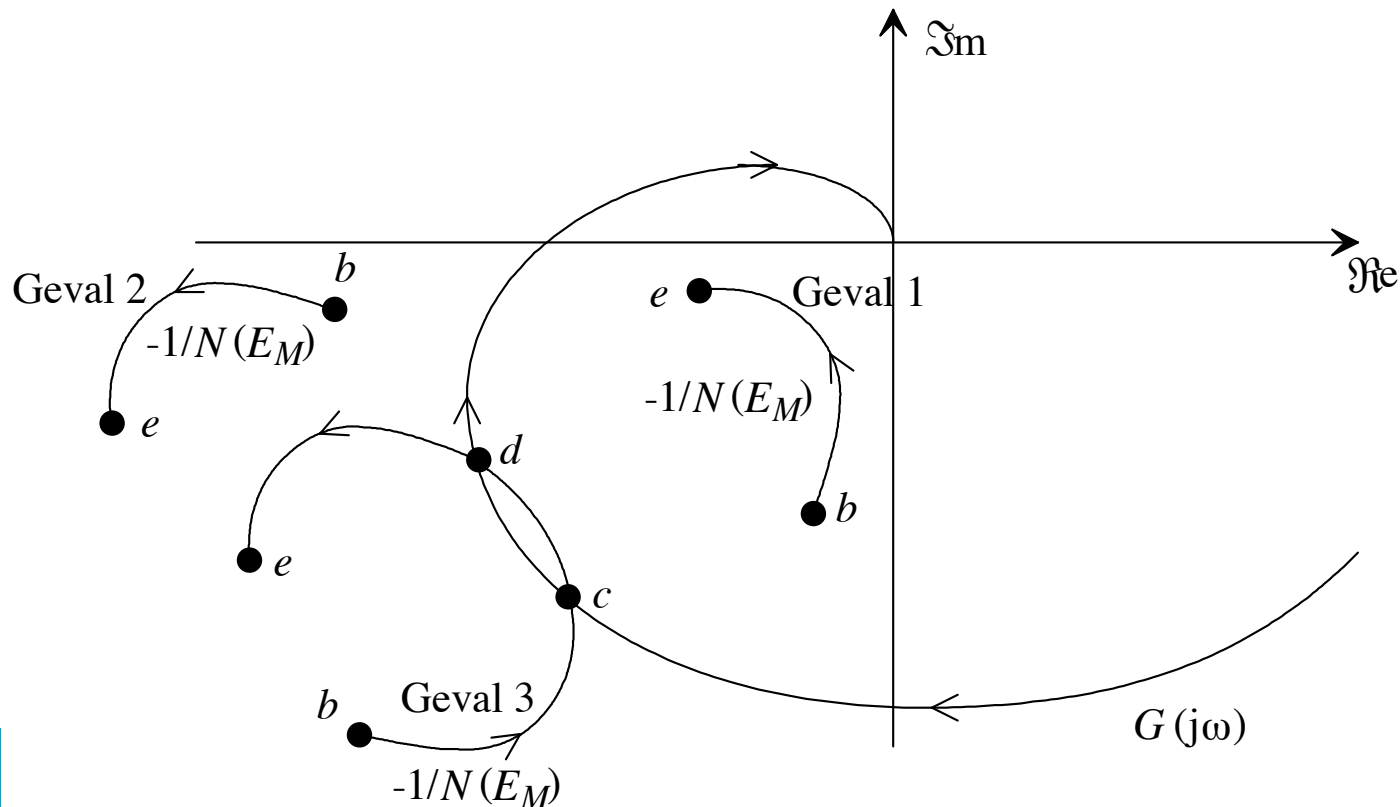
– karakteristieke vergelijking:  $1 + N(E_M)G(j\omega) = 0$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(E_M)}$$

– ipv kritisch punt -1, hebben we nu kritische kromme  $-1/N$

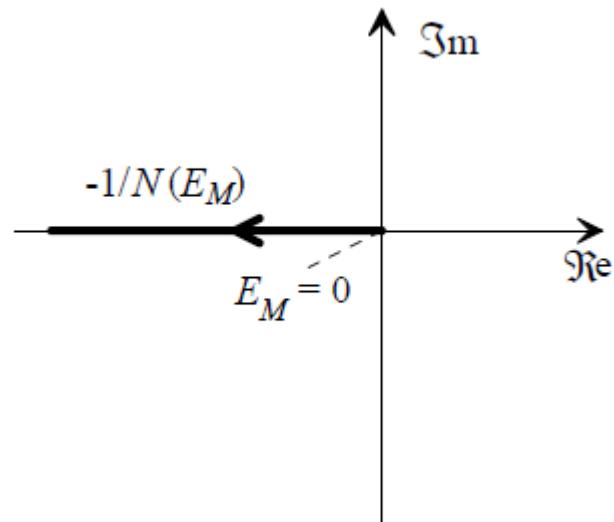
# Stabiliteit van een teruggekoppeld systeem met niet-lineariteit (2)

- Bepaal evenwichtsvoorwaarden van limietoscillatie
  1. kritische kromme omsloten door Nyquistcurve: onstabiel
  2. kritische kromme buiten Nyquistcurve: stabiel, geen limietcyclus
  3. snijpunt  $d$ : stabiele limietcyclus – snijpunt  $c$ : instabiele limietcyclus

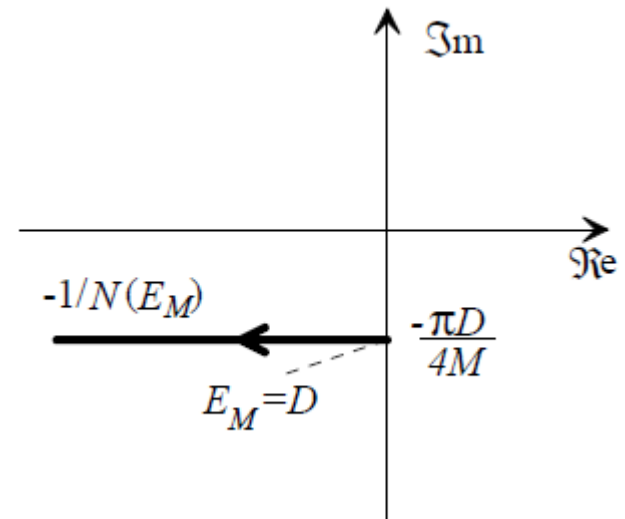


# Stabiliteit van een teruggekoppeld systeem met niet-lineariteit (3)

- Voorbeeld: kristisch diagram voor aan-uit element met en zonder hysteresis



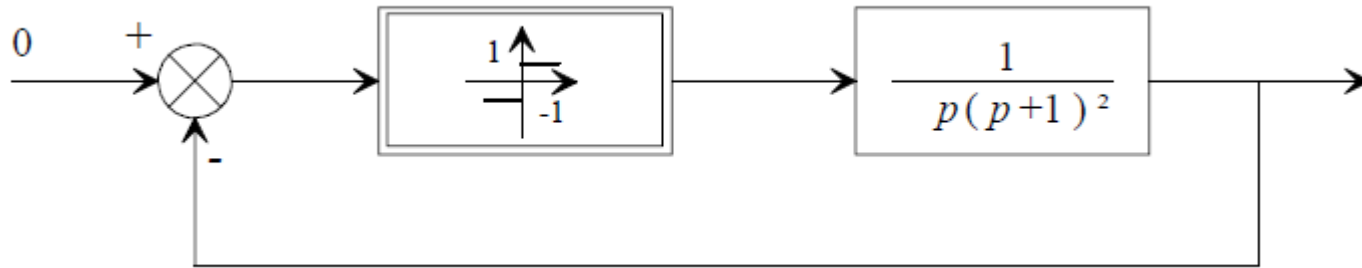
$$N = \frac{4M}{\pi E_M} \quad (\text{aan-uit element})$$



$$N = \frac{4M}{\pi E_M} e^{-j\text{bgsin}\left(\frac{D}{E_M}\right)} \quad (\text{aan-uit met hysteresis})$$



# Methode 2: voorbeeld (1)

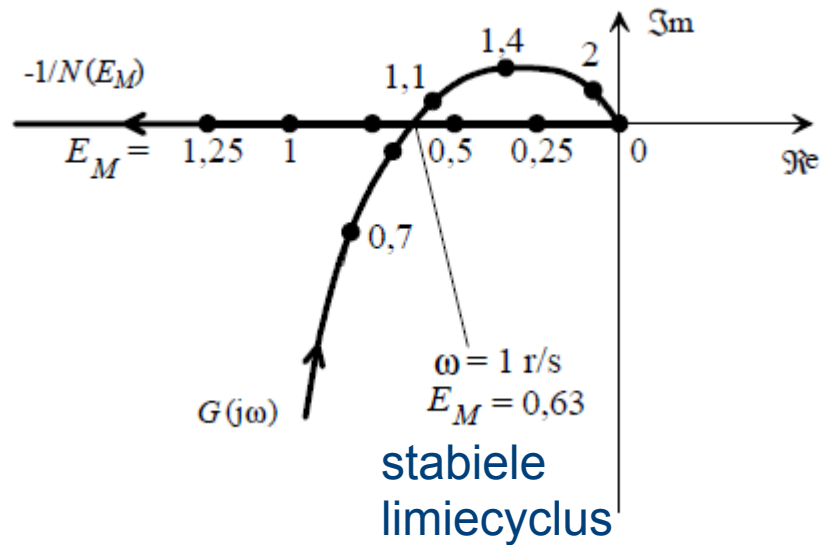


- Beschrijvende-functie voor het aan-uit element

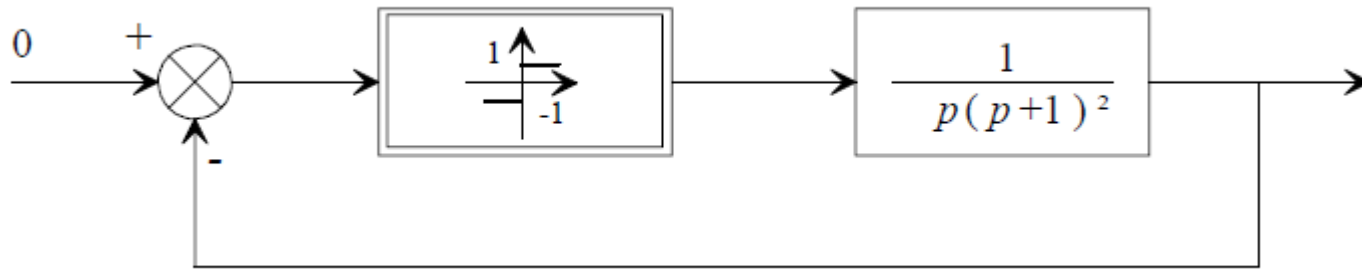
$$N = \frac{4M}{\pi E_M} = \frac{4}{\pi E_M}$$

- Kritisch diagram

$$-\frac{1}{N(E_M)} = -\frac{\pi E_M}{4}$$



# Methode 2: voorbeeld (2)



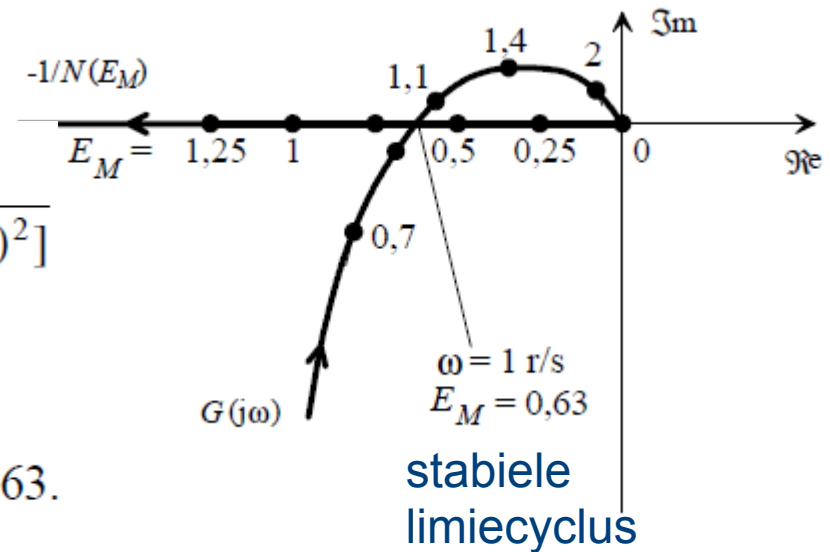
- Zoek  $E_m$  en  $\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2} = \frac{-2\omega - j(1 - \omega^2)}{\omega[(1 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2]}$$

$$\Im[G(j\omega)] = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$$

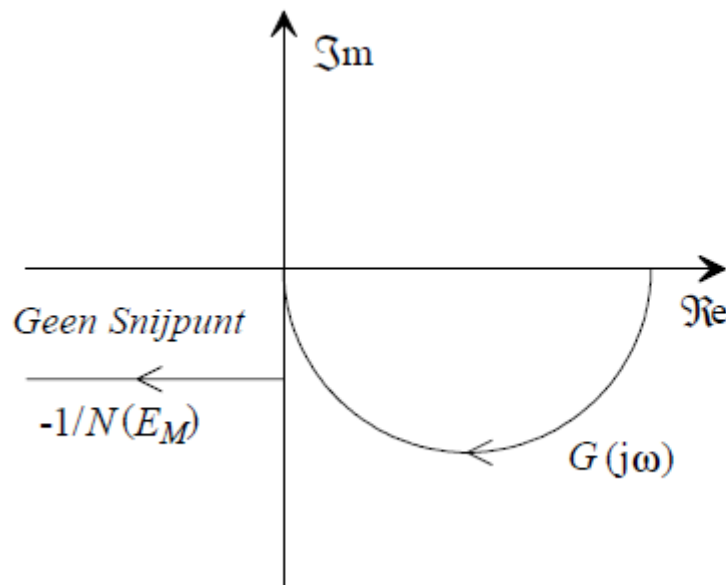
$$\Re[G(j\omega)] = -\frac{1}{2} = -\frac{\pi E_M}{4} \text{ waaruit } E_M = 0,63.$$

Met  $\omega=1$

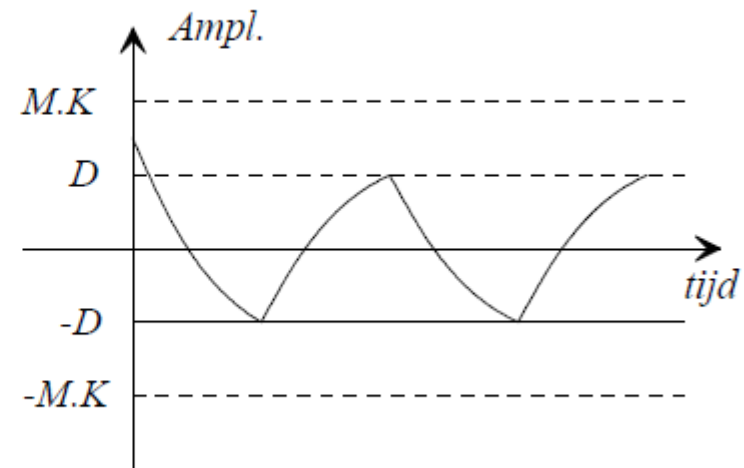


# Methode 2: beperkingen (1)

- Orde lineaire systeem voldoende groot om verwaarlozing van hogere harmonischen te kunnen voldoen
  - vb: 1<sup>ste</sup> orde lineair systeem + aan-uit element met hysteresis



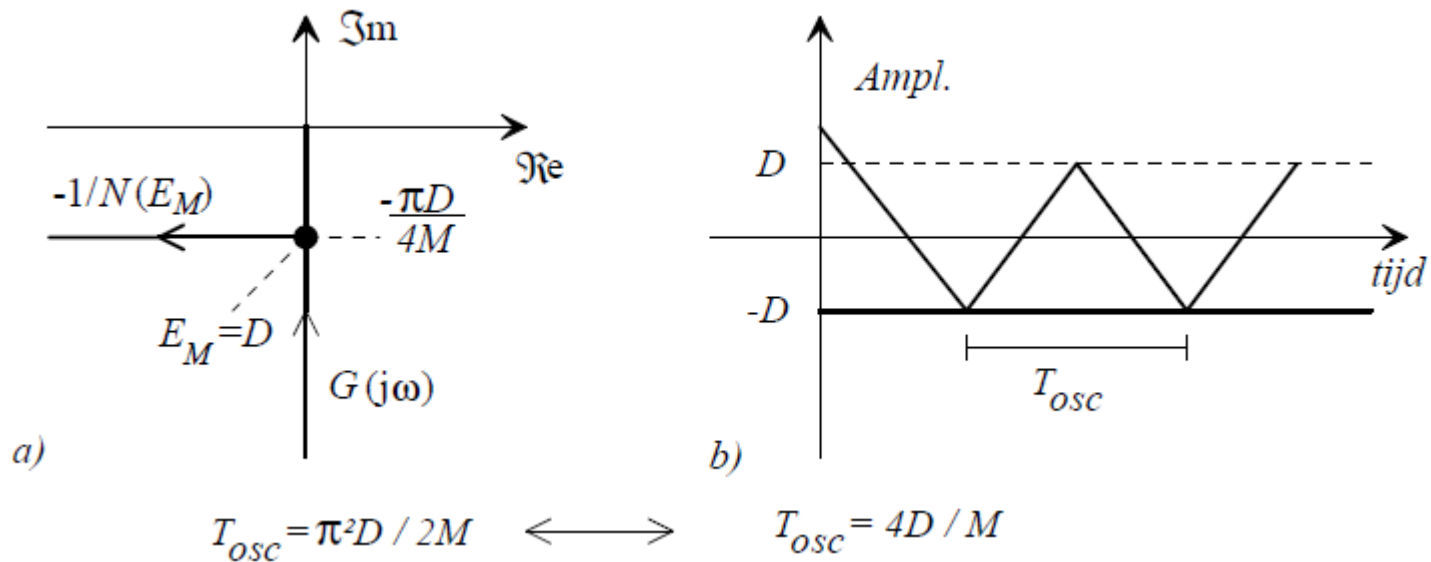
Besluit: geen oscillatie



Maar is geen juist besluit!

# Methode 2: beperkingen

- vb: zuivere integrator + aan-uit element met hysteresis



Maar is geen juist besluit!

# Les 11: Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars

- **Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars** [Baeten, REG2, Deel 2]
  - Niet-lineaire elementen
  - De fasevlakmethode
  - De beschrijvende-functiemethode
  - Simulatie
  - Temperatuurregeling met aan-uit regelaar

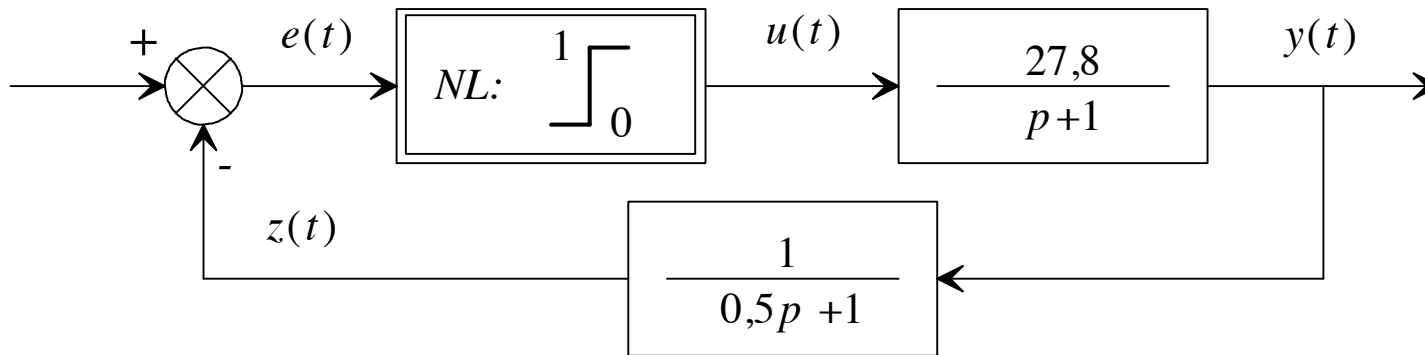
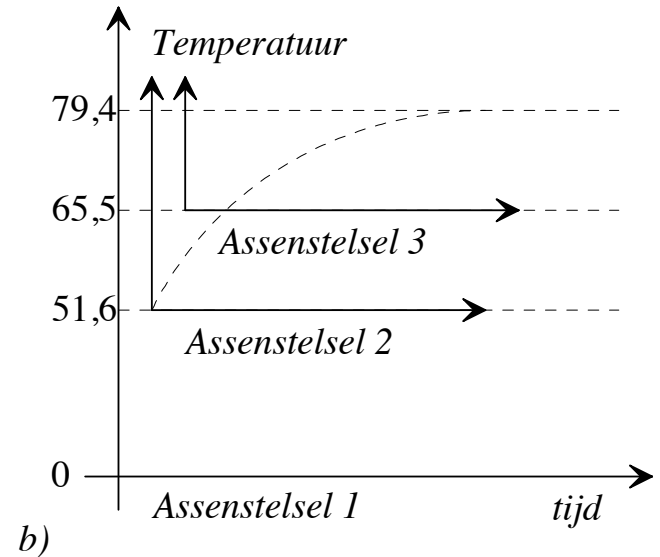
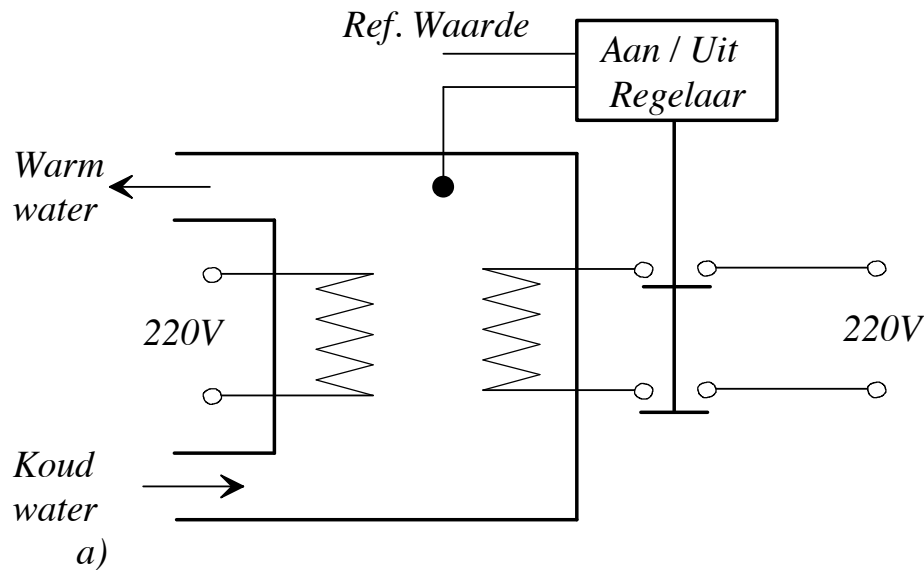
# Methode 3: simulatie

- Simulatie bv. in MATLAB/SIMULINK
- Let op met iteratie staptijd
  - niet te groot om vloeiend verloop te verkrijgen
  - niet te klein omwille van afrondingsfouten (recursieve berekening) en te trage simulatie
  - vuistregel neem  $\Delta t < 0.1\tau_i$  met  $\tau_i$  de kleinste tijdsconstante van het te simuleren systeem

# Les 11: Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars

- **Niet-lineaire regeltechniek en aan-uit regelaars** [Baeten, REG2, Deel 2]
  - Niet-lineaire elementen
  - De fasevlakmethode
  - De beschrijvende-functiemethode
  - Simulatie
  - Temperatuurregeling met aan-uit regelaar

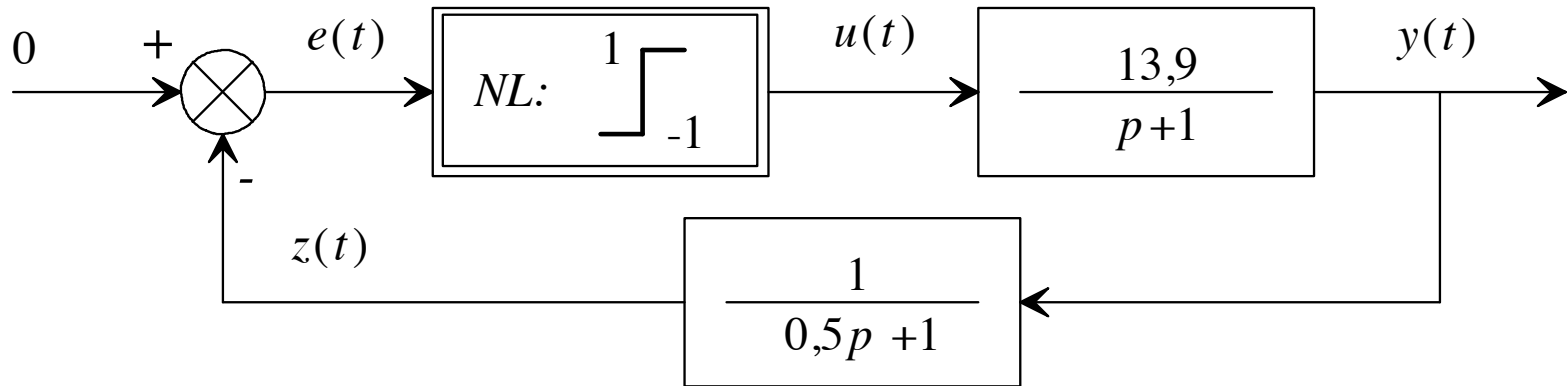
# Temperatuurregeling met aan/uit regelaar (1)





# Temperatuurregeling met aan/uit regelaar (2)

- Maak systeem symmetrisch rond referentiewaarde 65,5 °C



$$\frac{Z(p)}{U(p)} = \frac{13,9}{0,5p^2 + 1,5p + 1}$$

# Temperatuurregeling: met fasevlak (1)

1) voor  $e < 0$ , is  $u = -1$  en vinden we :  $0,5 \ddot{e} + 1,5 \dot{e} + e = 13,9u$

2) voor  $e > 0$ , is  $u = 1$  en vinden we :  $0,5 \ddot{e} + 1,5 \dot{e} + e = -13,9u$

- Voor  $e < 0$  met  $x_1 = e$  en  $x_2 = de/dt$

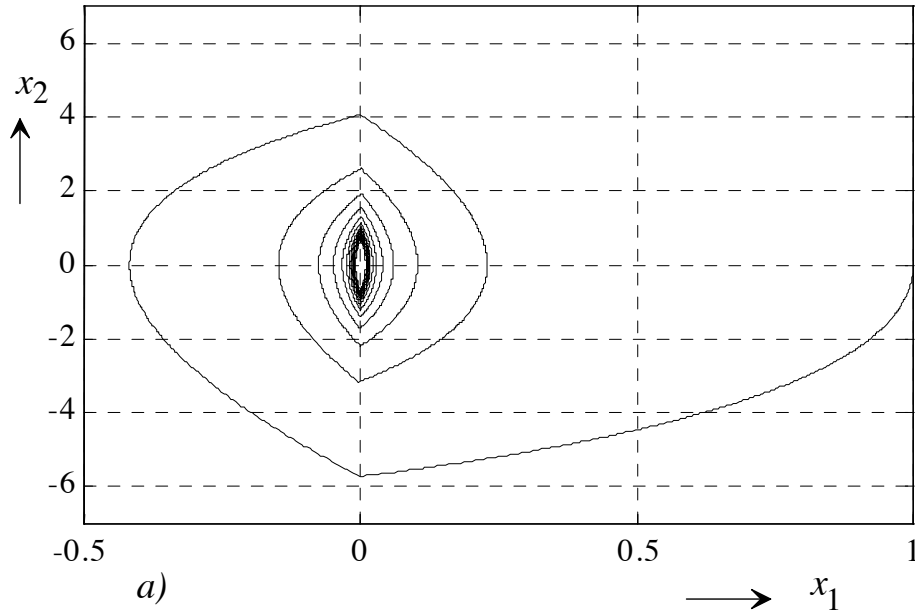
$$S = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{27,8 - 3x_2 - 2x_1}{x_2} \quad \text{of}$$

$$x_2 = \frac{27,8}{S+3} - \frac{2x_1}{S+3}$$

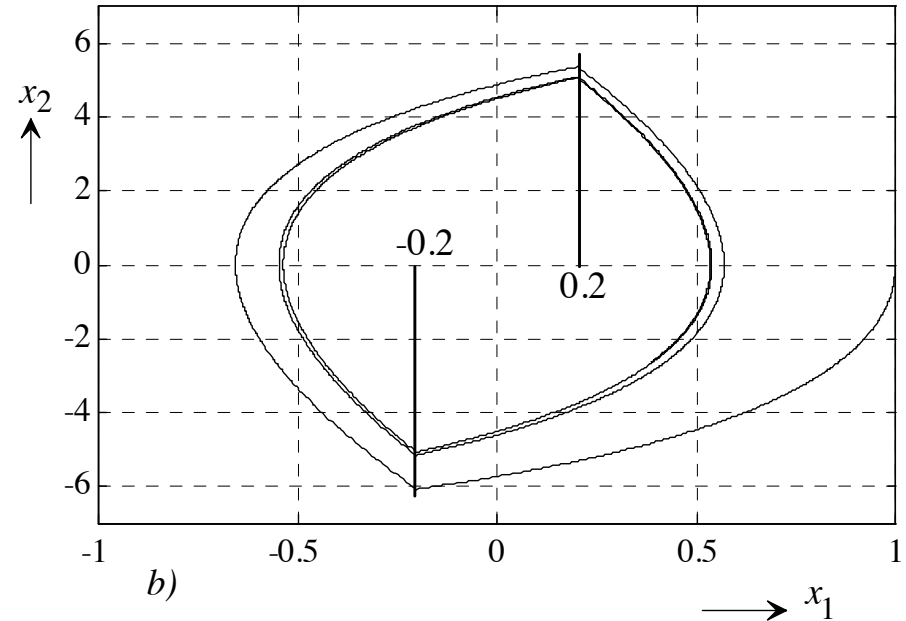
- Analoog voor  $e > 0$

	$e < 0$	
$S = 3$	$x_1 = 0$ $x_1 = 1$	$x_2 = 4,63$ $x_2 = 4,97$
$S = 5$	$x_1 = 0$ $x_1 = -1$	$x_2 = 3,48$ $x_2 = 3,72$
$S = 10$	$x_1 = 0$ $x_1 = -1$	$x_2 = 2,14$ $x_2 = 2,29$
$S = 20$	$x_1 = 0$ $x_1 = -1$	$x_2 = 1,21$ $x_2 = 1,30$
$S = -10$	$x_1 = 0$ $x_1 = -1$	$x_2 = -3,97$ $x_2 = 4,26$
$S = -15$	$x_1 = 0$ $x_1 = -1$	$x_2 = -2,32$ $x_2 = -2,48$
$S = -30$	$x_1 = 0$ $x_1 = -1$	$x_2 = -1,03$ $x_2 = -1,10$

# Temperatuurregeling: met fasevlak (2)

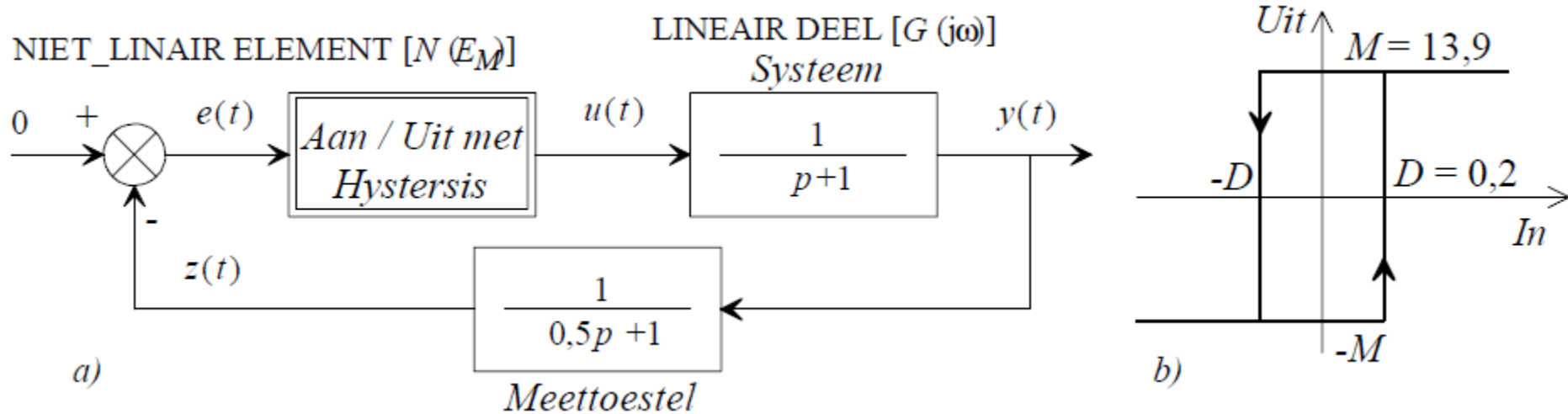


zonder hysteresis

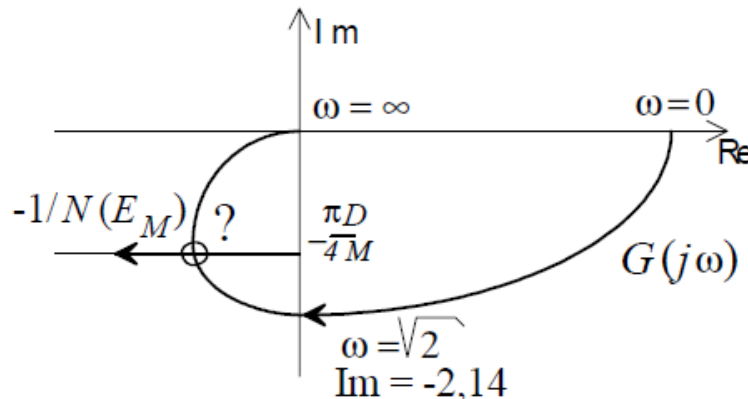


met hysteresis

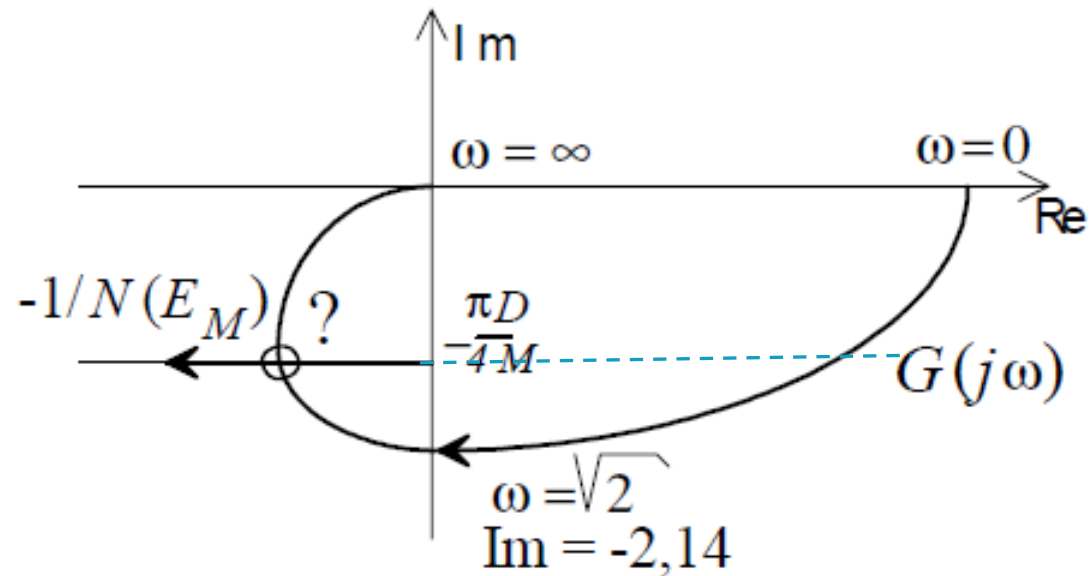
# Temperatuurregeling: met beschrijvende functiemethode (1)



- Merk op dat versterking van proces  $K$  nu 1 is omdat  $M = 13,9$



# Temperatuurregeling: met beschrijvende functiemethode (2)

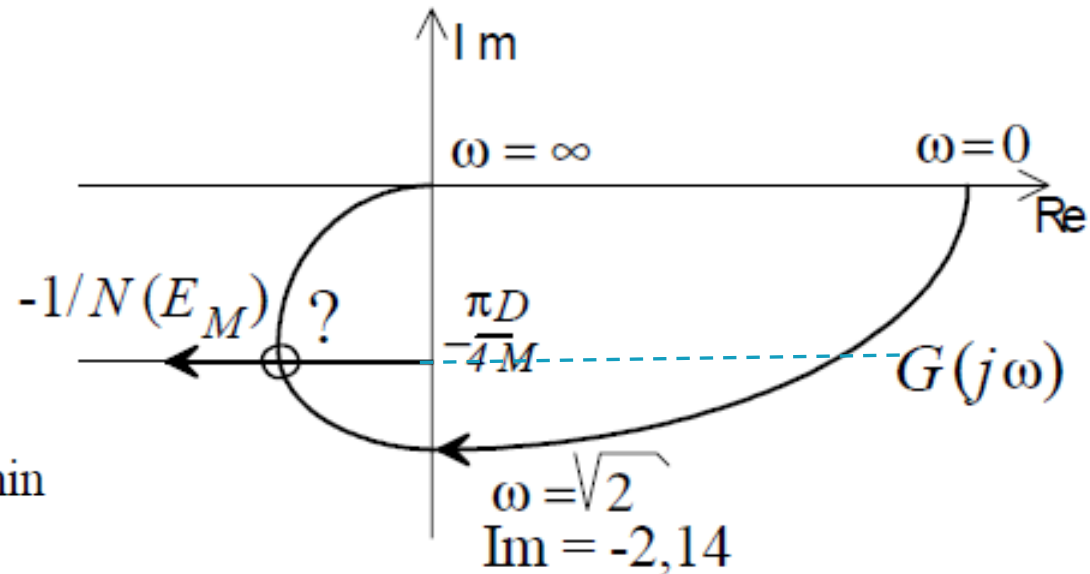


$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+j0,5\omega)} = \frac{1-0,5\omega^2}{0,25\omega^4+1,25\omega^2+1} + j\frac{-1,5\omega}{0,25\omega^4+1,25\omega^2+1}$$

$$\Im m(G) = \frac{-1,5\omega}{0,25\omega^4+1,25\omega^2+1} = -\frac{\pi D}{4M} = -1,13 * 10^{-2}$$

$$\omega = 7,5 * 10^{-3} \text{ rad/min} \quad \text{en} \quad \omega = 8,095 \text{ rad/min}$$

# Temperatuurregeling: met beschrijvende functiemethode (3)



$$\omega = 8,095 \text{ rad/min}$$

$$\left| \frac{-1}{N(E_M)} \right| = |G(j\omega)|$$

$$\frac{E_M \pi}{4M} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{0,25\omega^2 + 1}} \rightarrow \underline{\underline{E_M = 0,52}}$$

# Toepassing: met simulatie

- Met MATLAB/SIMULINK → zie Toledo