



Meet- en Regeltechniek

Les 7: De klassieke regelaars

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen

ESAT – Departement Elektrotechniek

KU Leuven, Belgium

Meet- en Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**

- Les 1: Inleiding en modelvorming
- Les 2: Systemen van eerste orde
- Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Deel 2: Analoge regeltechniek**

- Les 4: De regelkring
- Les 5: Het wortellijnendiagram
- Les 6: Oefeningen wortellijnendiagram
- Les 7: De klassieke regelaars
- Les 8: Regelaarontwerp + oefeningen
- Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
- Les 10: Speciale regelstructuren
- Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

- **Deel 3: Digitale regeltechniek**

- Les 12: Het discreet systeemgedrag & het discreet equivalent
- Les 13: De discrete regelkring & de toestandsregelaar

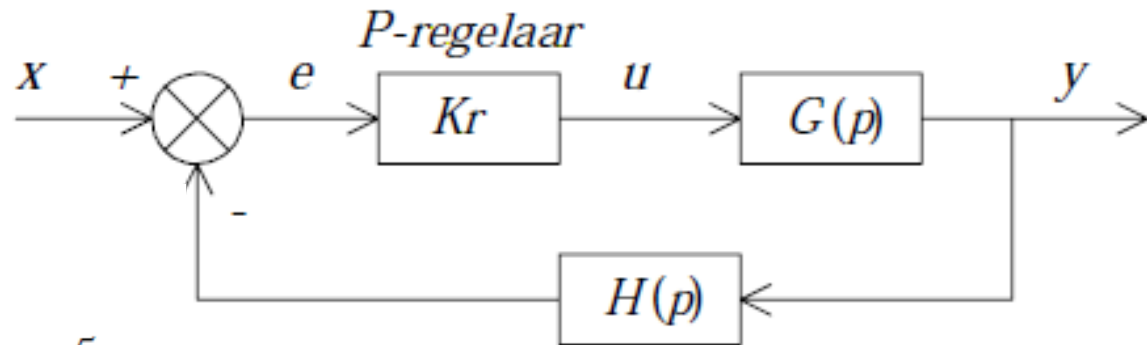
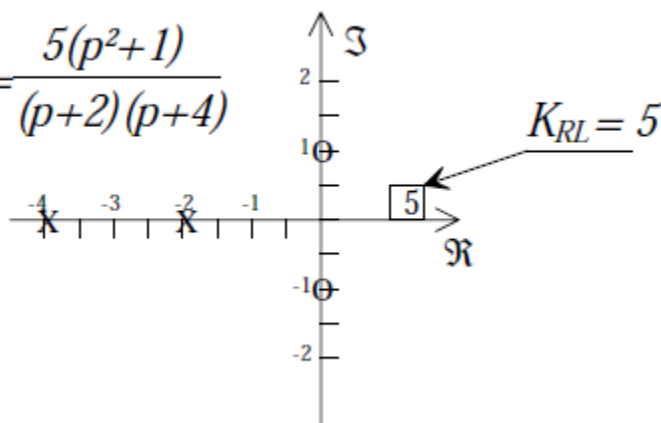
Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

P-regelaar (1)

- TF P-regelaar = Kr
- Fout e verzwakt/versterkt met Kr om stuursignaal u te maken
- Wortellijnendiagramm geeft invloed P-regelaar (Kr) op geslotenlussysteem
- Merk op: $Kr \neq K_{RL}$

$$GH = \frac{5(p^2+1)}{(p+2)(p+4)}$$

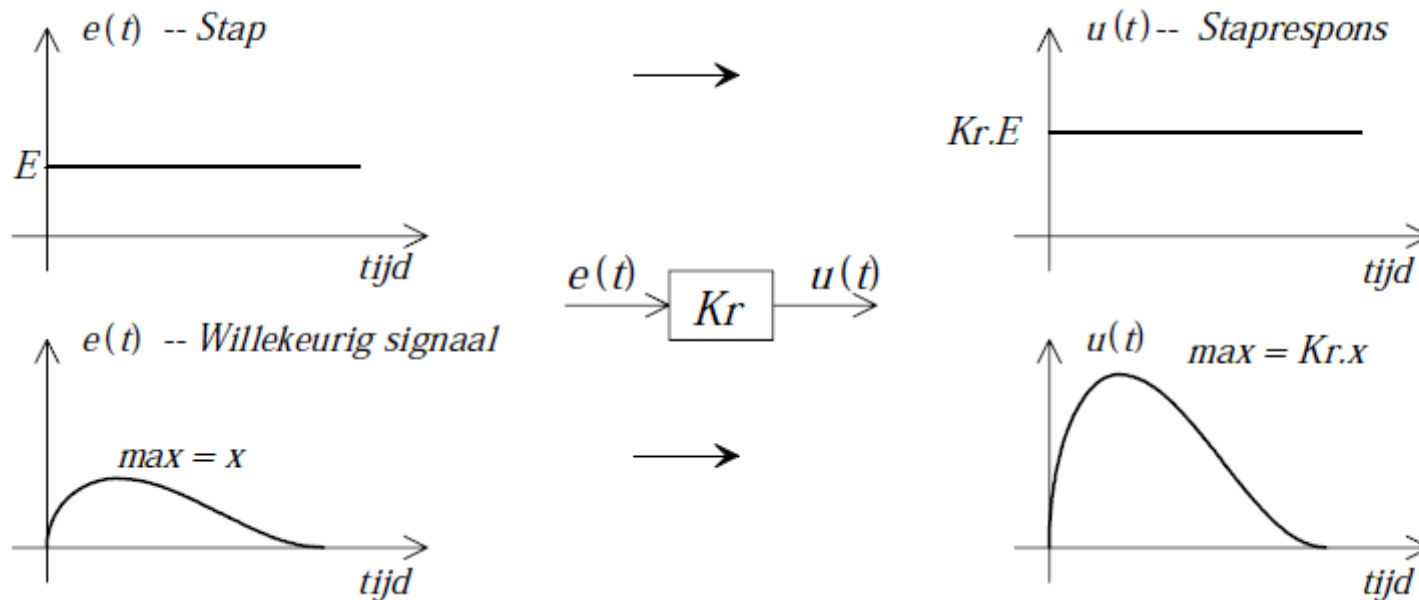


P-regelaar (2)

- Voordelen ?
 - Systeem sneller maken en verkleinen standfout naarmate K_r stijgt
 - Verschuiven van polen geslotenlussysteem
 - Ruisonderdrukking bij grote K_r waarden
- Nadelen ?
 - Mogelijk instabiel bij grote K_r
 - Zeer hevige systemen bij grote K_r
 - Geen ruisonderdrukking bij kleine K_r
 - Standfout groter naarmate K_r verkleint

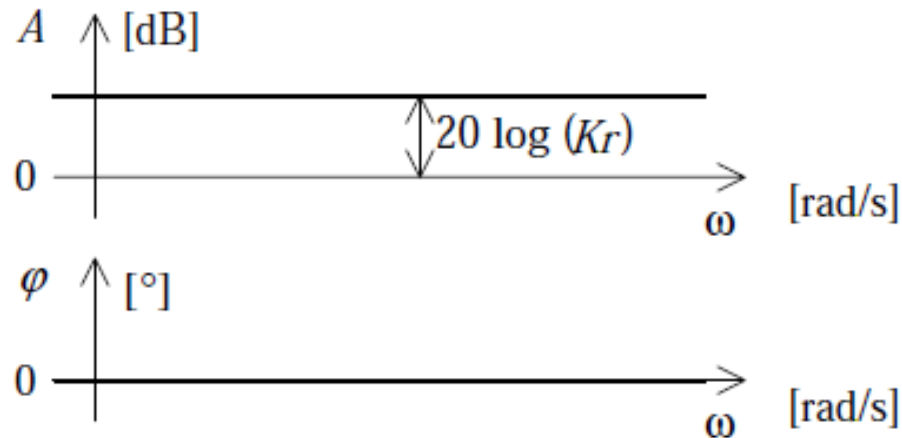
P-regelaar (3)

- Ontwerp P-regelaar = trade-off tussen voor- en nadelen
- Belangrijkste criterium: Bepaal optimale K_r zodat systeem (relatief) stabiel blijft
- Voorbeelden:



P-regelaar (4)

- Bode-diagram P-regelaar:
 - amplitude = constant
 - fase = 0



- P-regelaar zorgt voor verschuiving amplitudegedeelte van Bode-diagram openlus TF = vergroting/verkleining AM

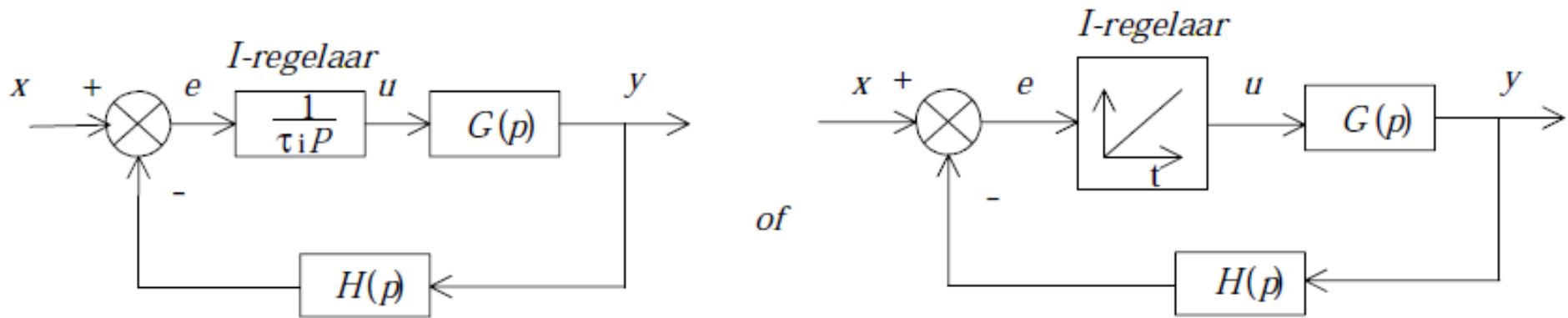
Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

I-regelaar (1)

- TF I-regelaar = $\frac{1}{\tau_i p}$
- Fout e wordt geïntegreerd en met factor $\frac{1}{\tau_i}$ vermenigvuldigd:

$$u(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt \quad \text{of} \quad U(p) = \frac{1}{\tau_i p} E(p)$$

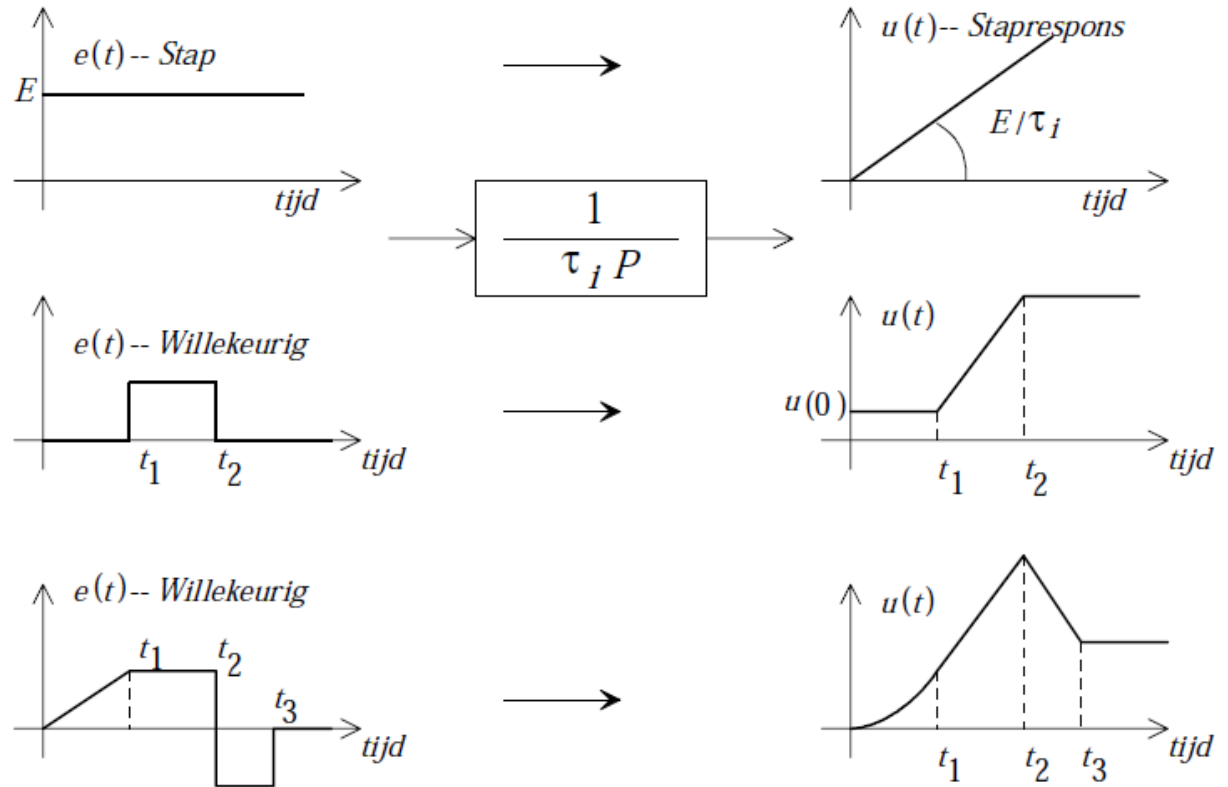


I-regelaar (2)

- Voordelen ?
 - Standfout of statische fout wordt geëlimineerd door integratie van $e(t)$
- Nadelen ?
 - Mogelijk instabiel bij kleine τ_i (te snelle integratie)
 - Mogelijk te langzame systemen bij te grote τ_i (te trage integratie)

I-regelaar (3)

- Voorbeelden:



- Merk op: in praktijk zal uitgangssignaal verzadigingswaarde bereiken gelijk aan voedingsspanning op-amp I-regelaar

I-regelaar (4)

- Bode-diagram I-regelaar:

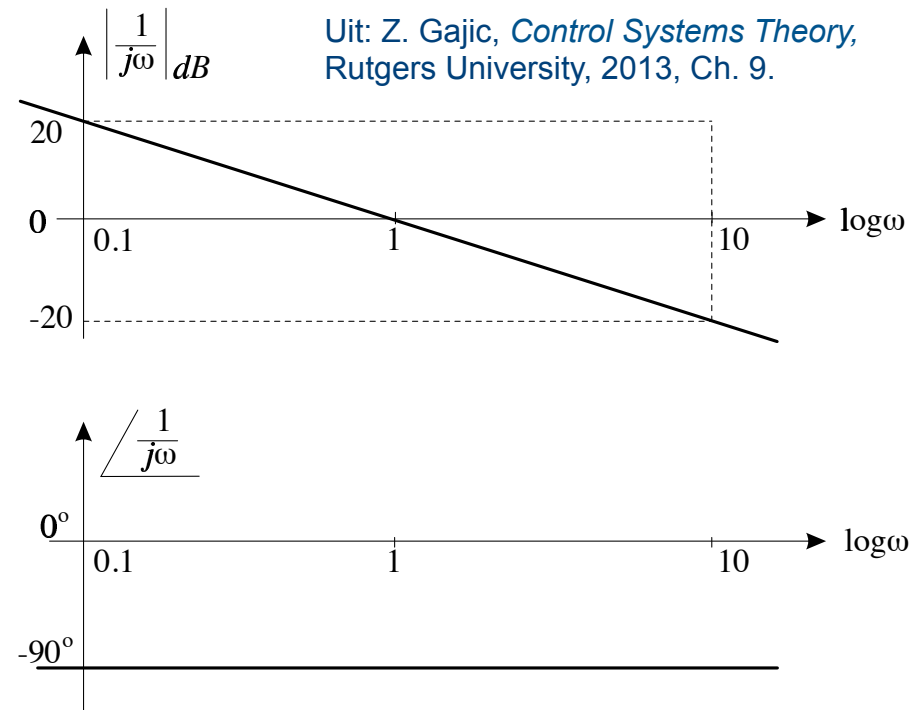
- amplitude =
lineair dalend op
log-log schaal
- fase = -90°

- I-regelaar zorgt voor:

- oneindige versterking van statische signalen zodat

$$\text{standfout } \frac{1}{1+K} = 0$$

- constante faseverschuiving van -90° , zodat FM verkleint (relatief onstabiel)



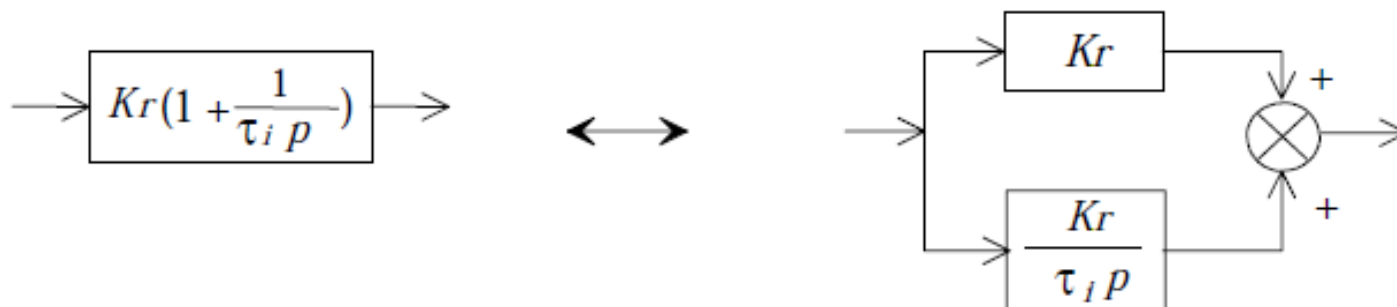
Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

PI-regelaar (1)

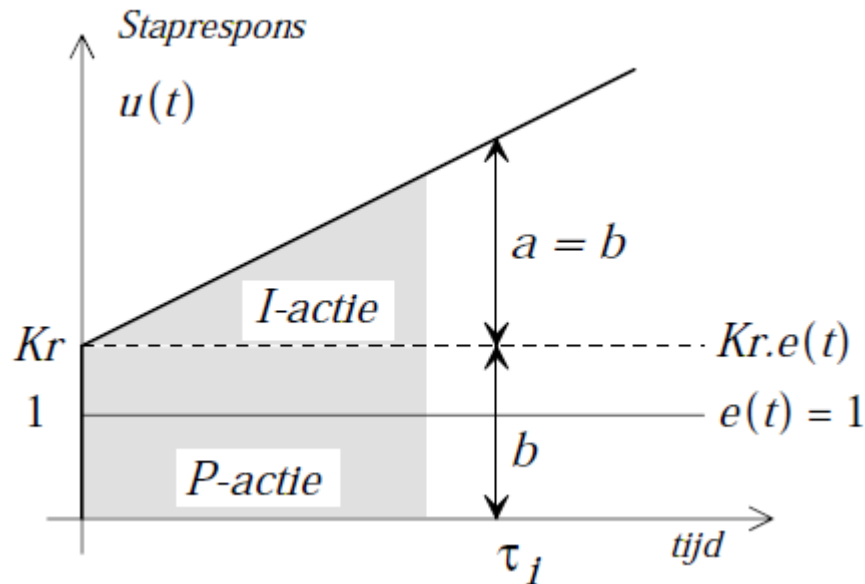
- TF PI-regelaar = $Kr \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right)$
- PI-regelaar = combinatie P- en I-regelaar
- Som van fout e en geïntegreerde fout wordt versterkt met Kr

$$u(t) = Kr \left(e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt \right) \quad \text{of} \quad U(p) = Kr \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) E(p)$$



PI-regelaar (2)

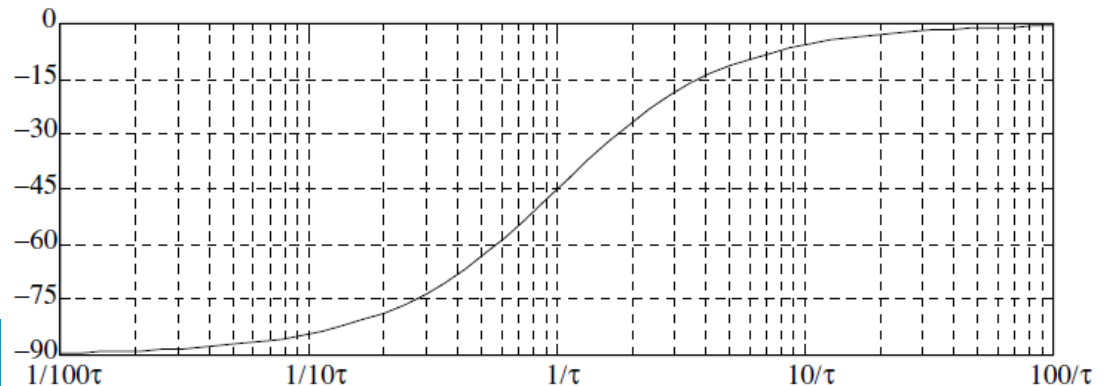
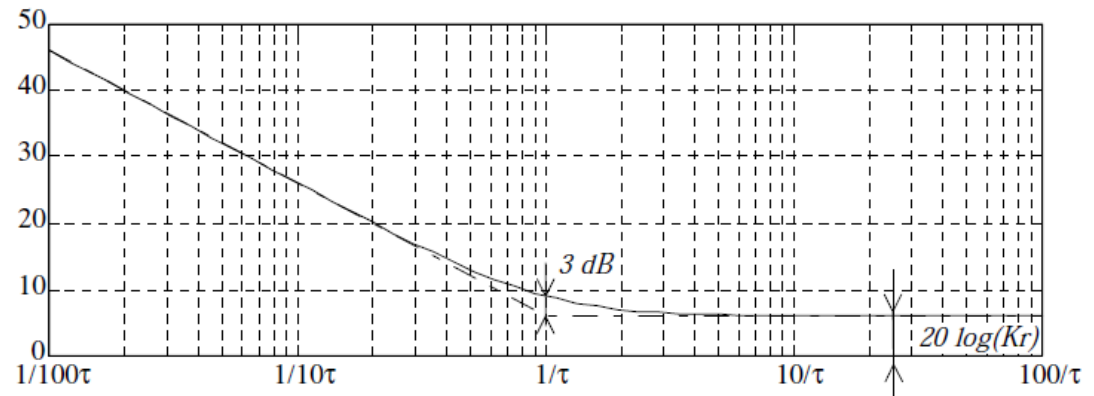
- Staprespons PI-regelaar:



- P- en I-actie zijn gelijk op tijdstip τ_i
- Invloed van tijdsconstante I-actie:
 - τ_i klein: snelle regelaar
 - τ_i groot: trage regelaar

PI-regelaar (3)

- Bode-diagram PI-regelaar:
 - I-actie bepaalt gedrag voor lage frequenties
 - P-actie bepaalt gedrag voor hoge frequenties
- standfout = 0
- breekpulsatie:
 - 3 dB boven Kr
 - fase 45°

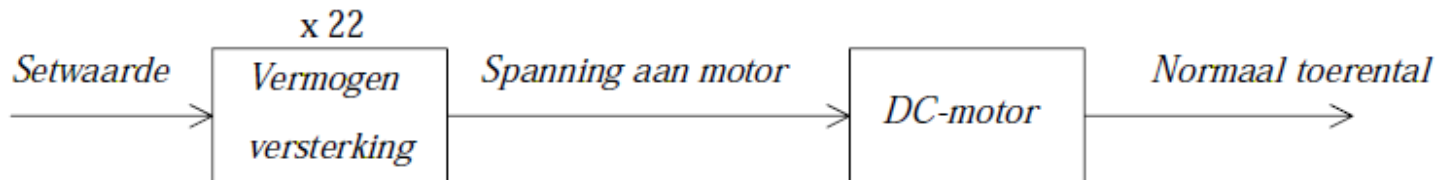


Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

Voorbeeld 1

- DC-motor aangestuurd via spanning 0-10V die versterkt wordt tot 0-220 V die wordt omgezet naar 0-3000 tr/min
- TF van motor, versterker ?
 - $K_m = 3000/220 = 13.63$ [tr/min V]
 - $K_v = 220/10 = 22$
 - $K_{mv} = 22 \times 13.63 = 300$ [tr/min V]
- Open sturing: draait de motor wel aan 3000 tr/min (ballast, wrijving, . . .) ?
- Oplossing: terugkoppeling !



Voorbeeld 1

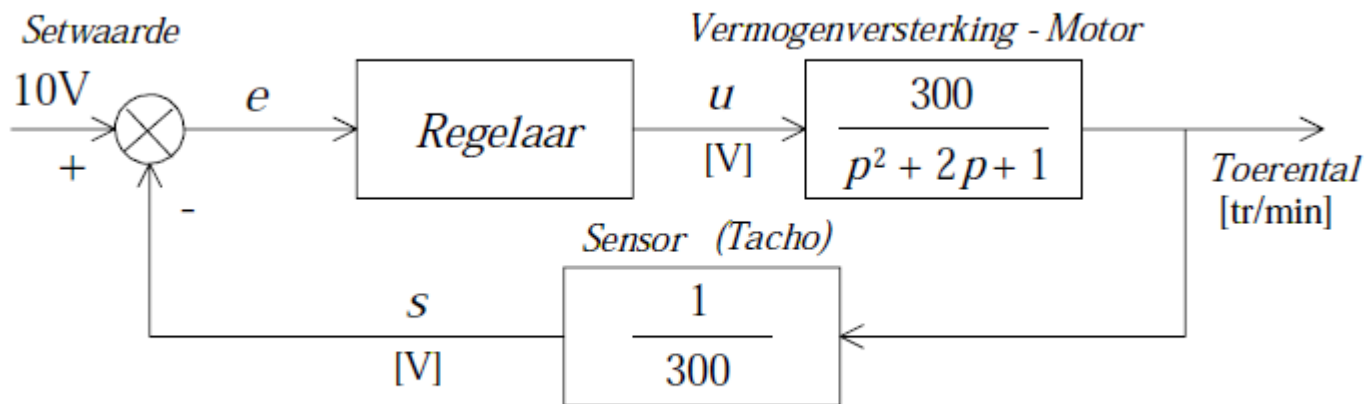
- Tachometer zet toerental om in spanning:

$$10V = 3000 \text{ tr/min} \Rightarrow K_t = 1/300 \text{ [tr/min V]}$$

- Motor is 2e orde systeem met statische versterking K_{mv}
- Veronderstel P-regelaar met $K_r = 2$

- Standfout: $1 - \frac{KG(0)H(0)}{1 + KG(0)H(0)} = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K} \text{ [%]}$

- Hier is K statische openlus versterking: $K = K_{mv}K_tK_r = 2$



Voorbeeld 1

- PI-regelaar: combinatie van P- en I-regelaar
- P-actie:
 - zorgt voor snelle opstart vanuit stilstand
 - resulteert in standfout
- I-actie ($\tau_i = 2$ s):
 - zorgt voor verdwijnen standfout
- TF PI-regelaar:

$$Kr \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{2p} \right) \quad \text{of} \quad u(t) = 2e(t) + \int_0^t e(t) dt$$

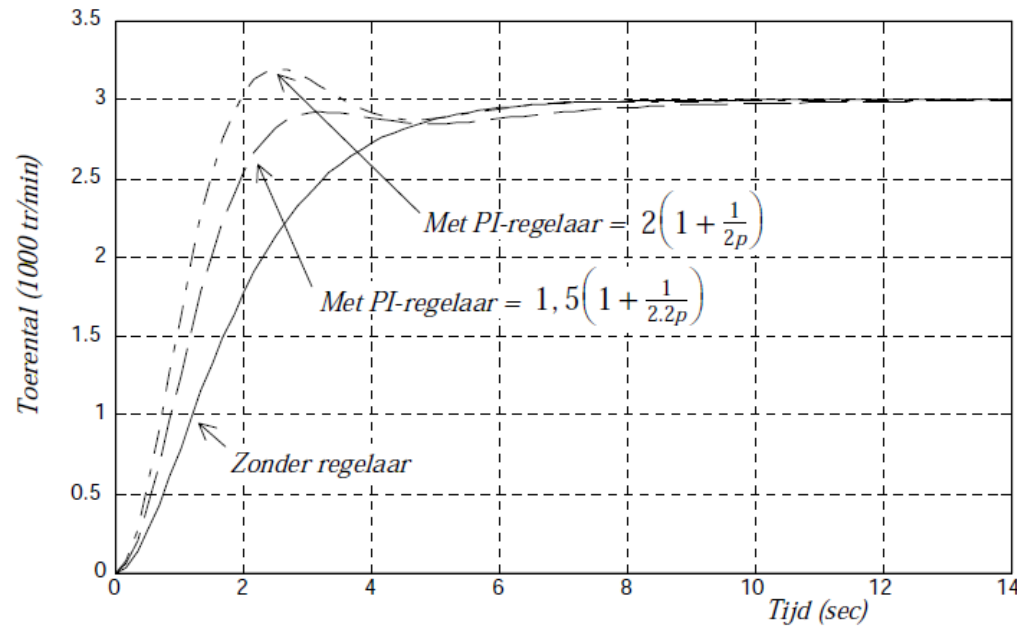
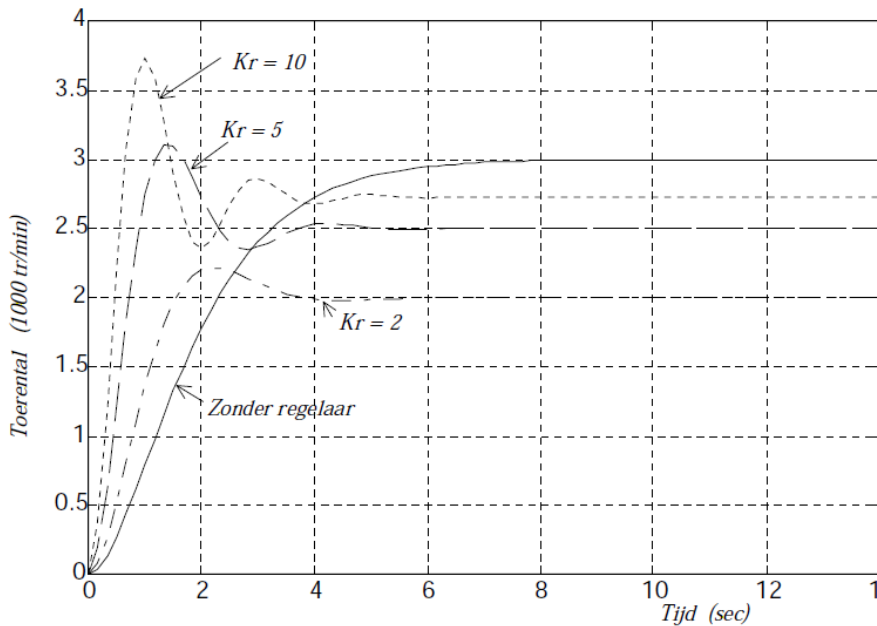
Voorbeeld 1

- Numerieke berekening van signalen in regelkring:

Tijd (sec.)	s (Tacho)	e (V)	P (V)	I (V)	$u = P + I$	Motor Spanning	toerental [tr/min]
	0,00	10,00	20,00		20,00	440,00	600,00
	2,00	8,00	16,00		16,00	352,00	1500,00
	5,00	5,00	10,00		10,00	220,00	1800,00
	6,00	4,00	8,00		8,00	176,00	2000,00
	6,67	3,33	6,67		6,67	146,67	2000,00
met integratie erbij							
1,00	6,67	3,33	6,66	<i>3,33</i>	10,00	220,00	2100,00
2,00	7,00	3,00	6,00	<i>6,33</i>	12,33	271,26	2400,00
3,00	8,00	2,00	4,00	<i>8,33</i>	12,33	271,26	2700,00
4,00	9,00	1,00	2,00	<i>9,33</i>	11,33	249,26	2850,00
5,00	9,50	0,50	1,00	<i>9,83</i>	10,83	238,26	2970,00
6,00	9,90	0,10	0,20	<i>9,93</i>	10,13	222,86	2985,00
7,00	9,96	0,04	0,08	<i>9,97</i>	10,05	221,10	2995,00
8,00	9,99	0,01	0,02	<i>9,98</i>	10,00	220,00	3000,00
9,00	10,00	0,00	0,00	<i>10,00</i>	10,00	220,00	3000,00

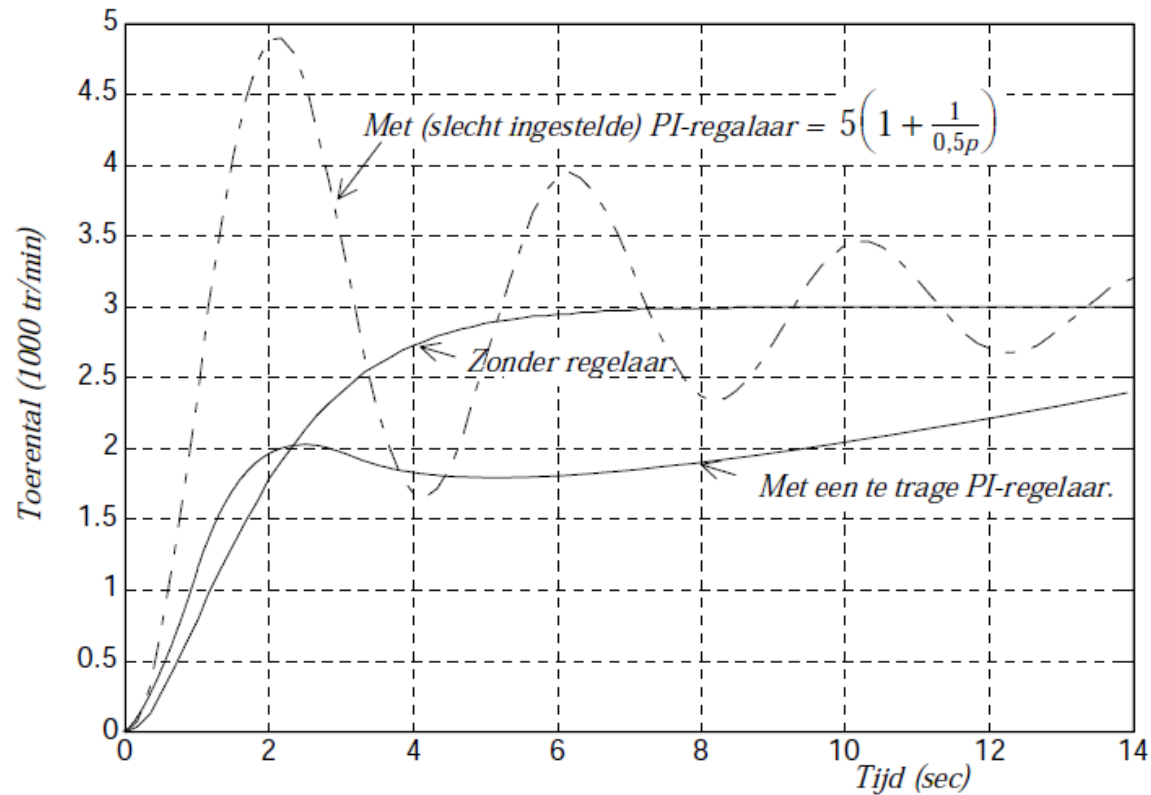
Voorbeeld 1

- Staprespons met P-regelaar en PI-regelaar



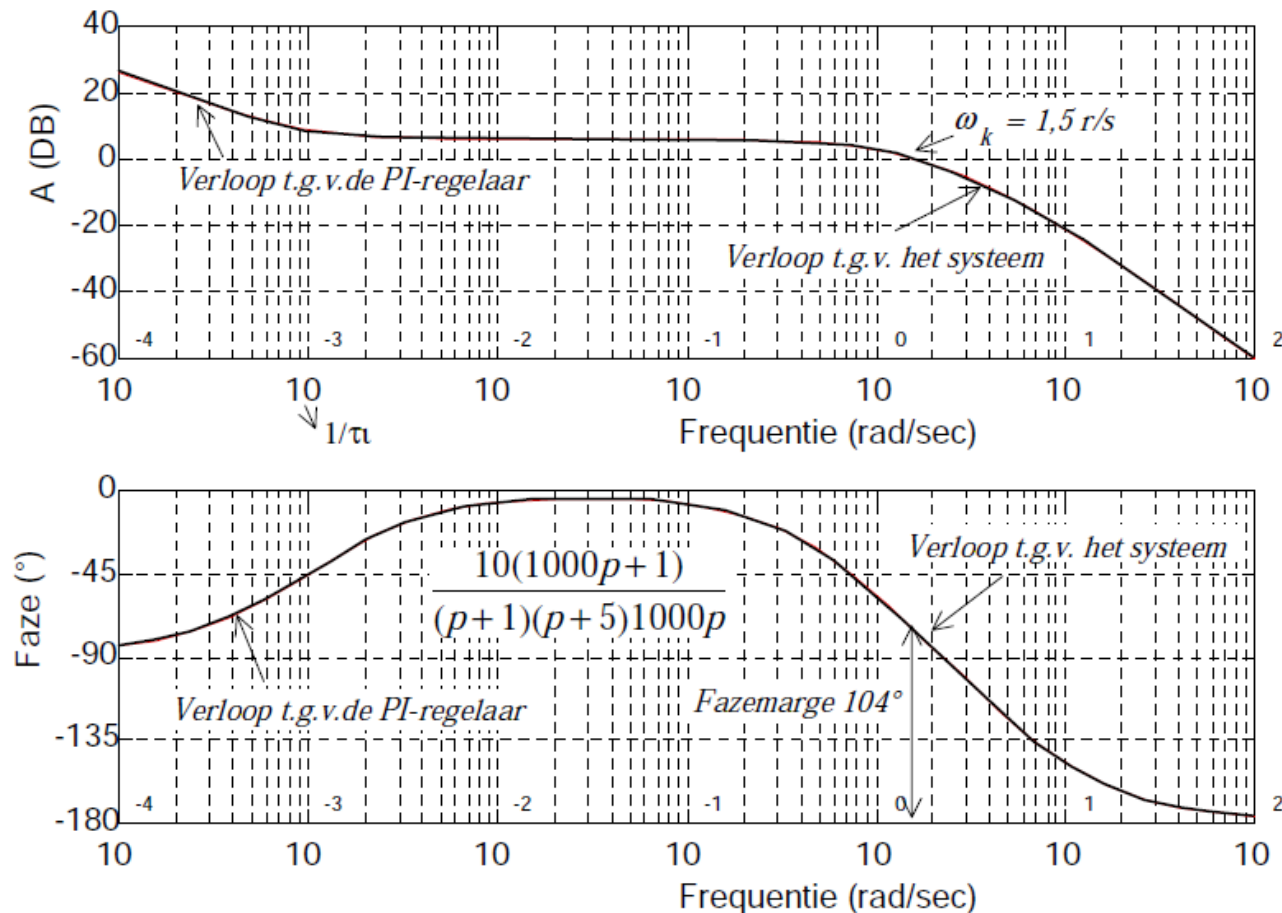
Voorbeeld 1

- Staprespons met slecht ingestelde PI-regelaar



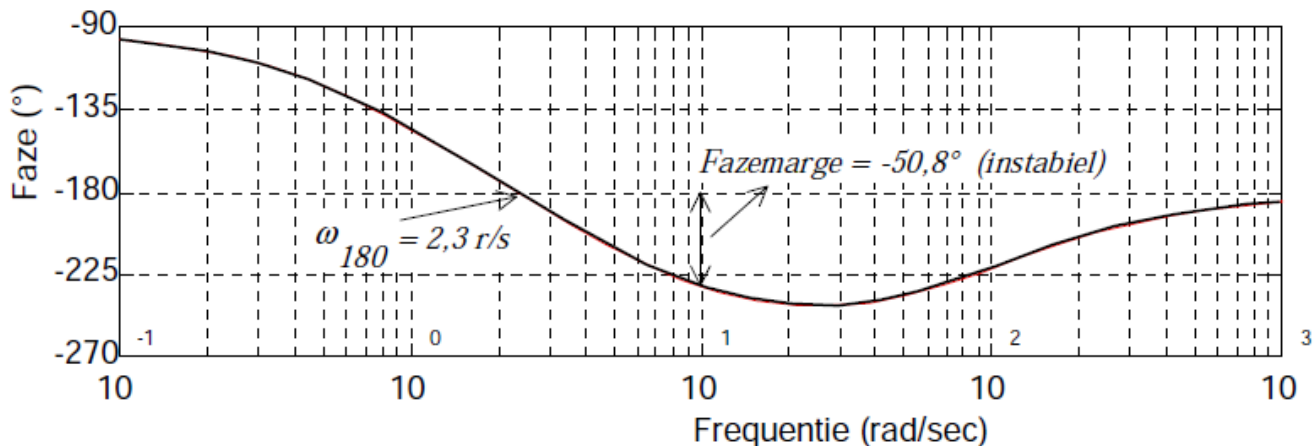
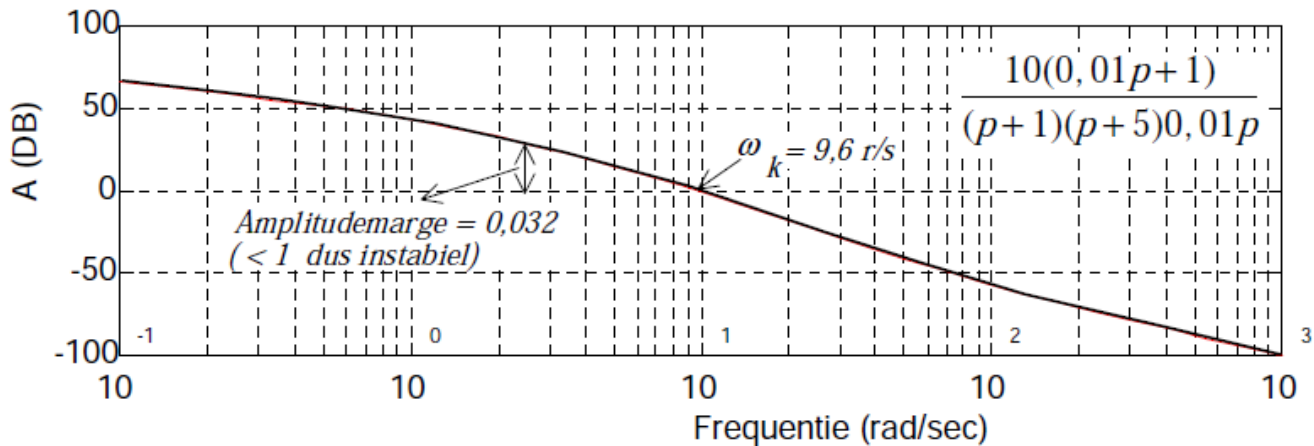
Voorbeeld 2

- Slecht ingestelde PI-regelaar: I-werking te traag (systeem is ruimschoots stabiel maar standfout relatief groot)



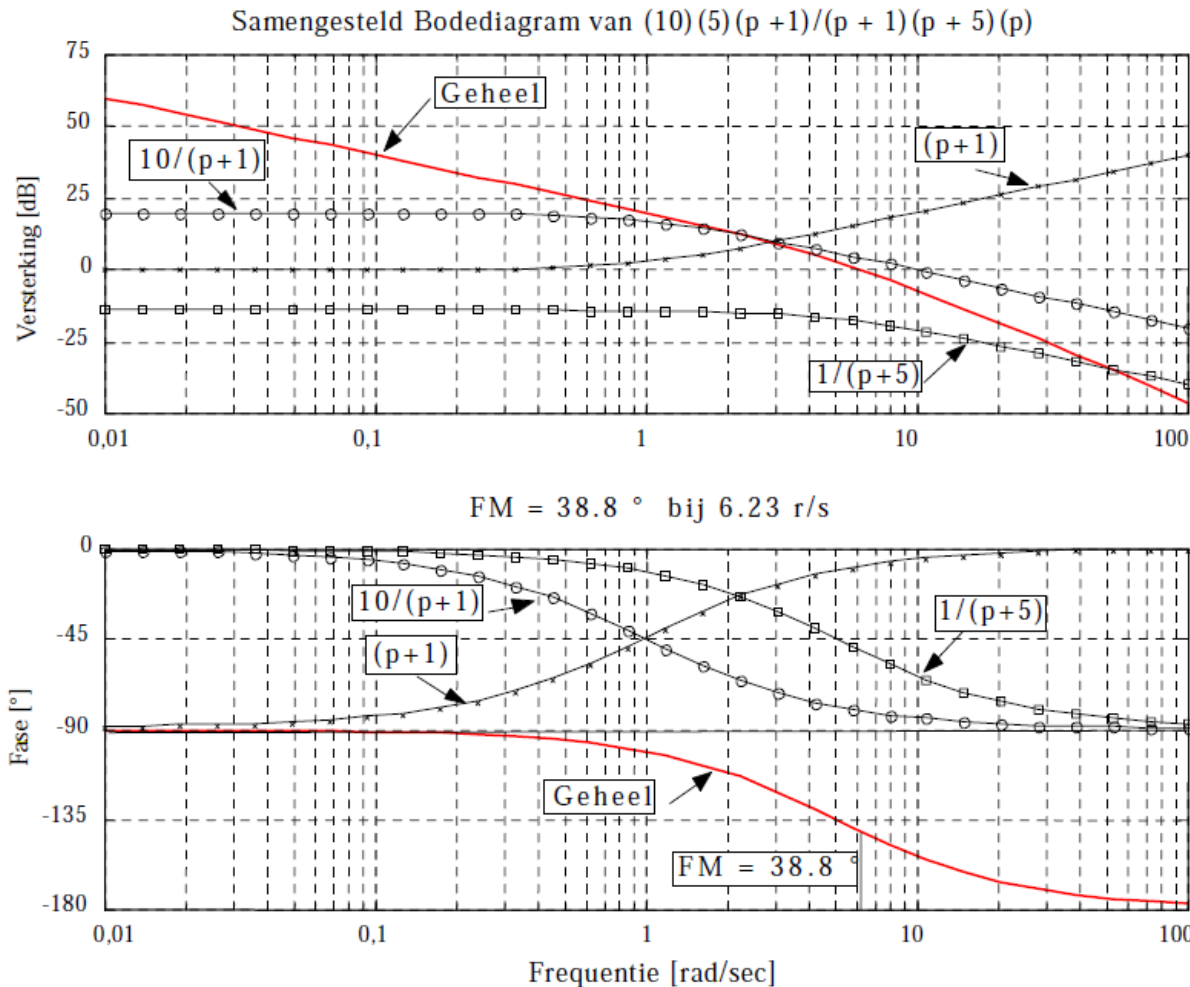
Voorbeeld 2

- Slecht ingestelde PI-regelaar: I-werking te snel (systeem is onstabiel)



Voorbeeld 2

- Juist ingestelde PI-regelaar: controleer AM en FM (oef.)



Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

D-actie (1)

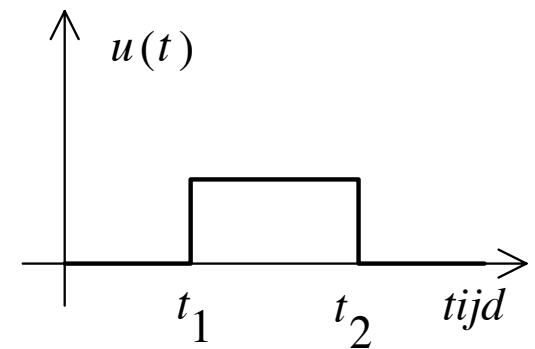
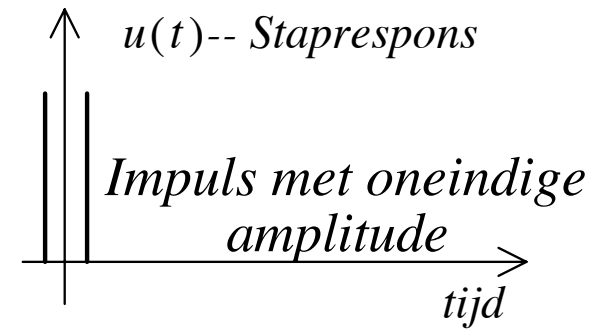
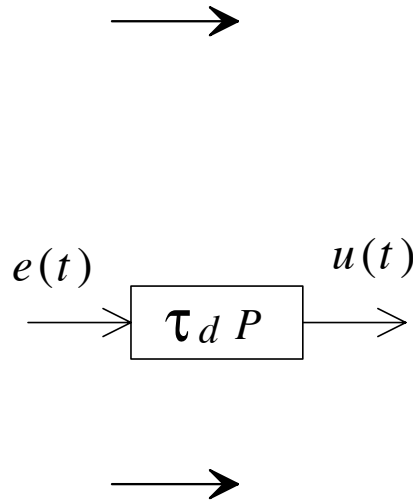
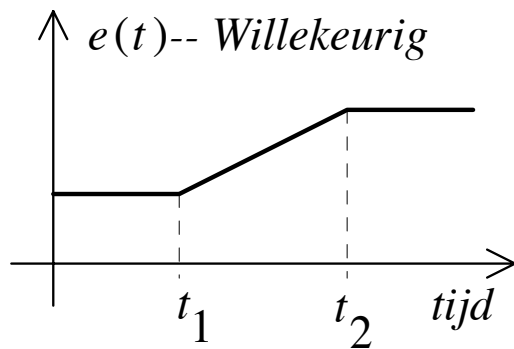
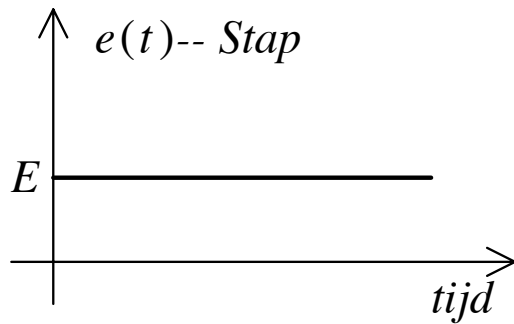
- TF D-actie = $\tau_d p$
- Fout e wordt gedifferentieerd en versterkt:

$$u(t) = \tau_d \frac{de(t)}{dt}$$

- zuivere D-actie wordt zelden gebruikt om regelaar te ontwerpen (vandaar niet: D-regelaar)
- D-actie heeft **stabiliserend effect** op regelkring
- Invloed van tijdsconstante D-actie:
 - τ_d te klein: D-actie heeft weinig invloed
 - τ_d te groot: onrustige regelaar

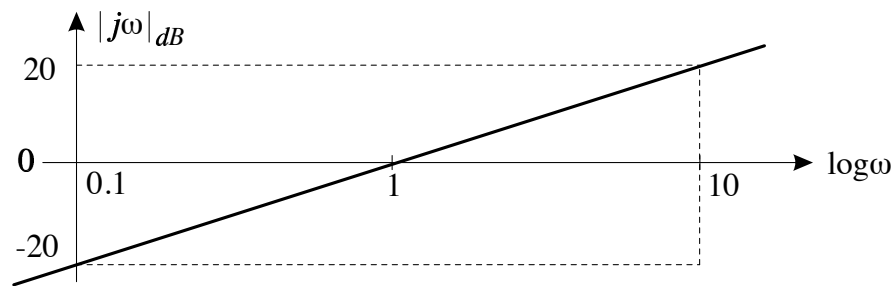
D-actie (2)

- Voorbeelden:

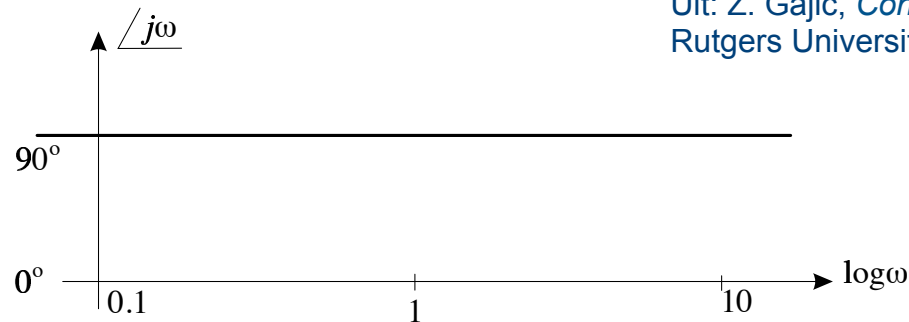


D-actie (3)

- Bode-diagram D-actie:
 - amplitude = lineair stijgend op log-log schaal
 - fase = $+90^\circ$



Uit: Z. Gajic, *Control Systems Theory*, Rutgers University, 2013, Ch. 9.



- D-actie zorgt voor constante faseverschuiving van $+90^\circ$, zodat FM vergroot (relatief stabiel)

Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

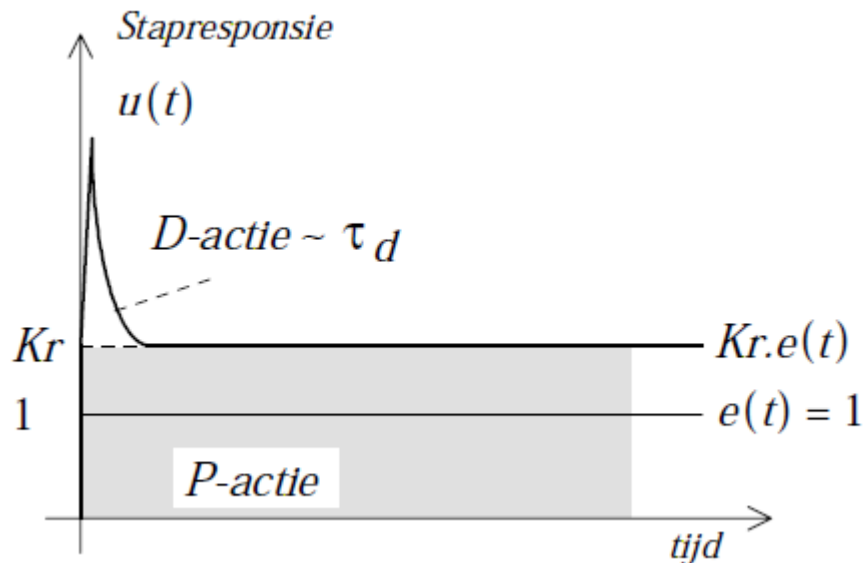
PD-regelaar (1)

- TF PD-regelaar = $Kr(1 + \tau_d p)$
- PD-regelaar = combinatie P-regelaar en D-actie
- Som van fout e en gedifferentieerde fout wordt versterkt met Kr :

$$u(t) = Kr \left(e(t) + \tau_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad \text{of} \quad U(p) = Kr(1 + \tau_d p)E(p)$$

PD-regelaar (2)

- Staprespons PD-regelaar:



- Tijdsconstante τ_d wordt meestal relatief klein gekozen: “tamme” PD-regelaar
- Te grote waarde voor τ_d zou systeem erg “nervuus” maken, en dus ruisgevoelig

PD-regelaar (3)

- Bode-diagram PD-regelaar:
 - spiegelbeeld van Bode-diagram PI-regelaar
 - positieve fase voor hoge frequenties heeft stabiliserend effect
 - oneindige versterking voor hoge frequenties kan instabiliteit veroorzaken
 - vuistregel: kies tijdsconstante τ_d van D-actie gelijk aan of iets kleiner dan tijdsconstanten van openlussysteem

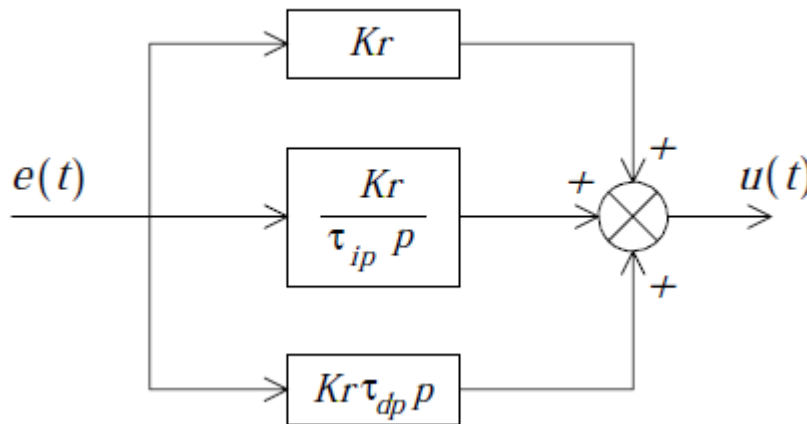
Les 7: De klassieke regelaars

- **De klassieke regelaars** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 4]
 - Proportionele (P) regelaar
 - Integrerende (I) regelaar
 - Proportioneel-integrerende (PI) regelaar
 - Voorbeelden
 - Differentiërende (D) actie
 - Proportioneel-differentiërende (PD) regelaar
 - Proportioneel-integrerende-differentiërende (PID) regelaar

PID-regelaar (1)

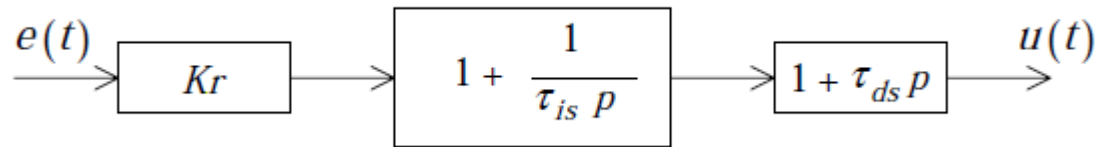
- TF **parallele** PID-regelaar = $Kr \left(1 + \tau_{dp}p + \frac{1}{\tau_{ip}p} \right)$
- PID-regelaar = combinatie P- en I-regelaar met D-actie
- Som van fout, geïntegreerde fout en gedifferentieerde fout wordt versterkt met Kr

$$u(t) = Kr \left(e(t) + \tau_{dp} \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_{ip}} \int_0^t e(t) dt \right)$$



PID-regelaar (2)

- TF seriële PID-regelaar = $Kr(1 + \tau_{ds}p) \left(1 + \frac{1}{\tau_{is}p} \right)$
- PID-regelaar = combinatie P- en I-regelaar met D-actie



PID-regelaar (3)

- Verband tussen seriële en parallelle PID-regelaar:

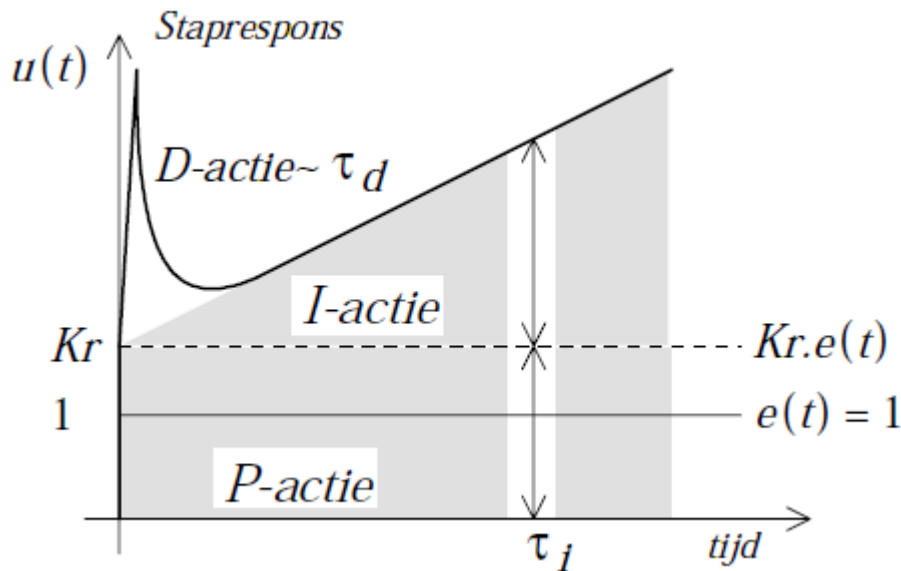
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{dp} = \frac{\tau_{ds}\tau_{is}}{\tau_{ds} + \tau_{is}} \\ \tau_{ip} = \tau_{is} + \tau_{ds} \\ K r_p = K r_s \left(1 + \frac{\tau_{ds}}{\tau_{is}} \right) \end{array} \right.$$

- Parallelle PID-regelaar is eenvoudiger te ontwerpen in tijdsdomein (bv. op basis van staprespons)
- Seriële PID-regelaar is eenvoudiger te ontwerpen in frequentiedomein (bv. op basis van Bode-diagram)

PID-regelaar = meest algemene van de klassieke regelaars

PID-regelaar (4)

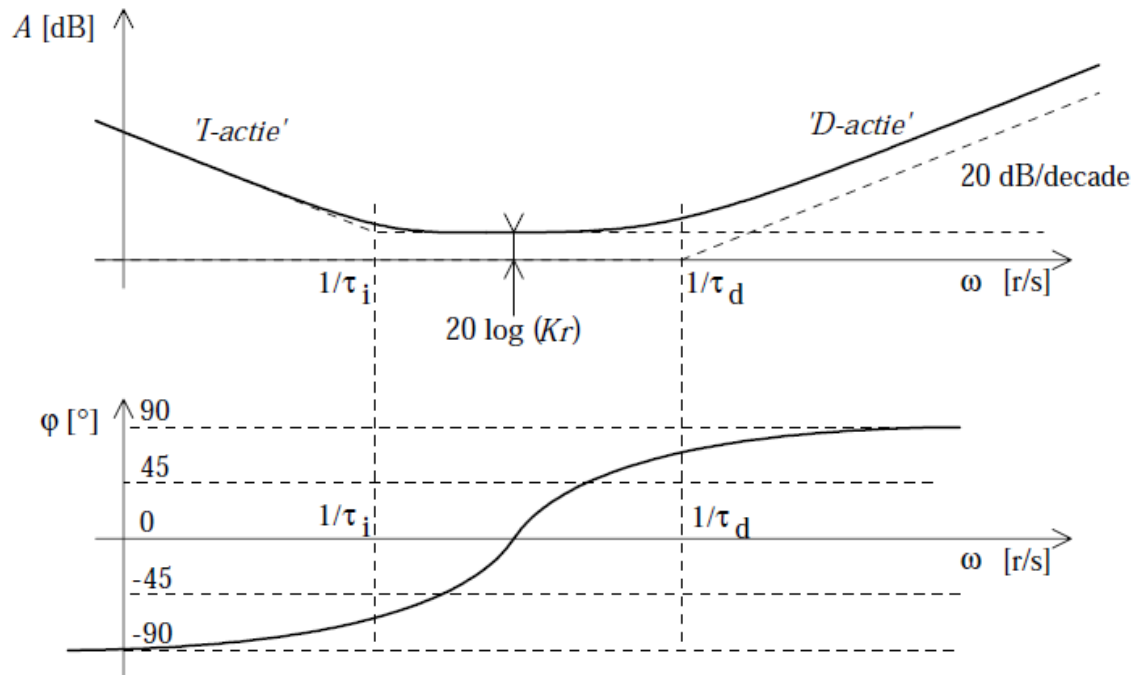
- Staprespons parallele PID-regelaar:



- D-actie heeft enkel invloed bij aanzet van staprespons
- P- en I-actie zijn gelijk op tijdstip τ_i

PID-regelaar (5)

- Bode-diagram seriële PID-regelaar:



- Vuistregel voor ontwerp van I- en D-actie:

$$\tau_d \leq \underbrace{\tau_{s1}, \tau_{s2}, \dots}_{\text{tijdsconstanten systeem}} \leq \tau_i$$

tijdsconstanten systeem