



Meet- en Regeltechniek

Les 5: Het wortellijnendiagramm

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen

ESAT – Departement Elektrotechniek

KU Leuven, Belgium



Meet- en Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**

- Les 1: Inleiding en modelvorming
- Les 2: Systemen van eerste orde
- Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Deel 2: Analoge regeltechniek**

- Les 4: De regelkring
- Les 5: Het wortellijnendiagram
- Les 6: Oefeningen wortellijnendiagram
- Les 7: De klassieke regelaars
- Les 8: Regelaarontwerp + oefeningen
- Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
- Les 10: Speciale regelstructuren
- Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars

- **Deel 3: Digitale regeltechniek**

- Les 12: Het discreet systeemgedrag & het discreet equivalent
- Les 13: De discrete regelkring & de toestandsregelaar

Les 5: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
 - Inleiding
 - Voorbeeld: analytische berekening polen
 - Constructieregels
 - Eigenschappen

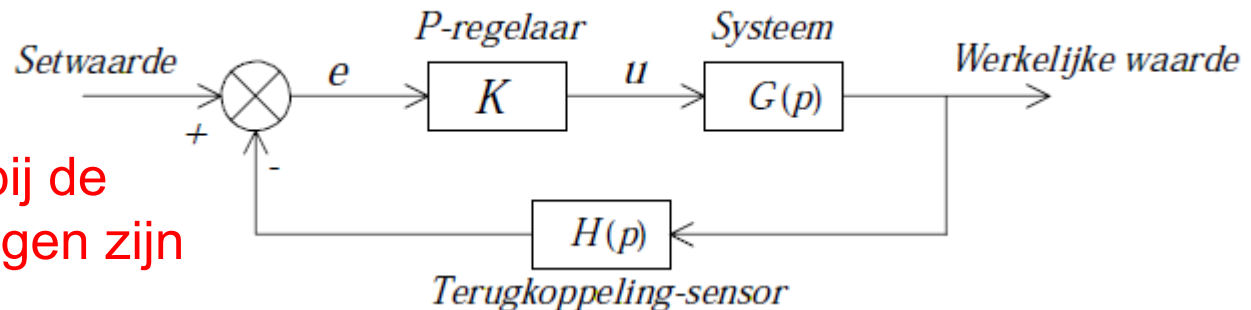
Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems*, 2005.

URL: <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html>

Inleiding

- Transiënt gedrag:
 - bepaald door ligging polen van geslotenlussysteem (= wortels van karakteristieke vergelijking)
- Wortellijnenmethode = grafische procedure die verloop van polen van *geslotenlussysteem* i.f.v. versterkingsfactor K weergeeft
- Zelfde als stabiliteit van een P-regelaar bestuderen



Polen die dicht bij de
imaginaire as liggen zijn
belangrijk
(= dominante polen)

Les 5: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
 - Inleiding
 - Voorbeeld: analytische berekening polen
 - Constructieregels
 - Eigenschappen

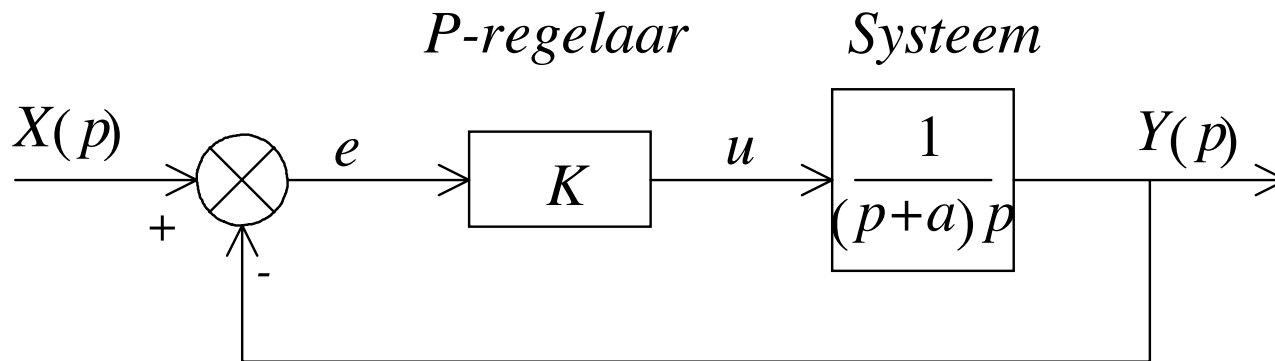
Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems*, 2005.

URL: <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html>

Voorbeeld: analytische berekening polen

- Concept: polen van **geslotenlus TF** berekenen en tekenen als functie van versterkingsfactor K
- Haalbaar voor 2^e orde systemen, niet voor hogere orde !
- Voorbeeld: 2^e orde systeem



$$G(p) = \frac{K}{p(p+a)} = \frac{T(p)}{N(p)} \quad (\text{openlus TF})$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -a \quad (\text{openlus polen})$$

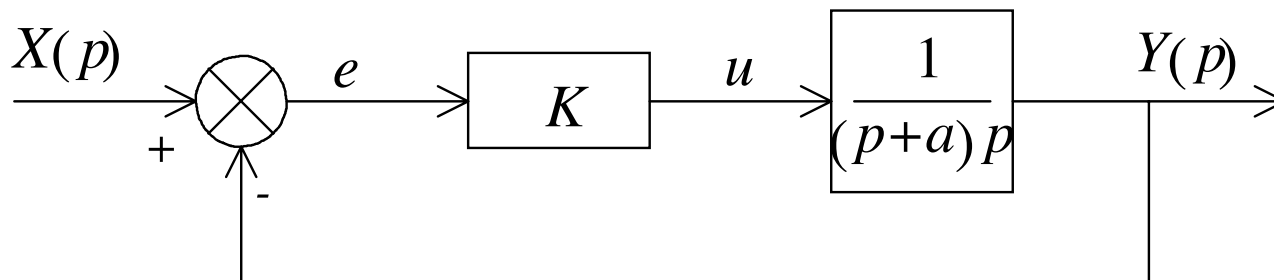
Voorbeeld: analytische berekening polen

- Geslotenlus TF:
$$Q(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{p^2 + pa + K} = \frac{T(p)}{T(p) + N(p)}$$
- Karakteristieke vergelijking:
$$T(p) + N(p) = 0 \text{ of } p^2 + pa + K = 0$$
- Polen geslotenlussysteem = wortels karakteristieke vgl:

$$p_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K}$$

P-regelaar

Systeem



Voorbeeld: analytische berekening polen

- Wortellijnendiagram: a constant, $K = 0 \rightarrow \infty$

$$p_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K}$$

- geval 1:

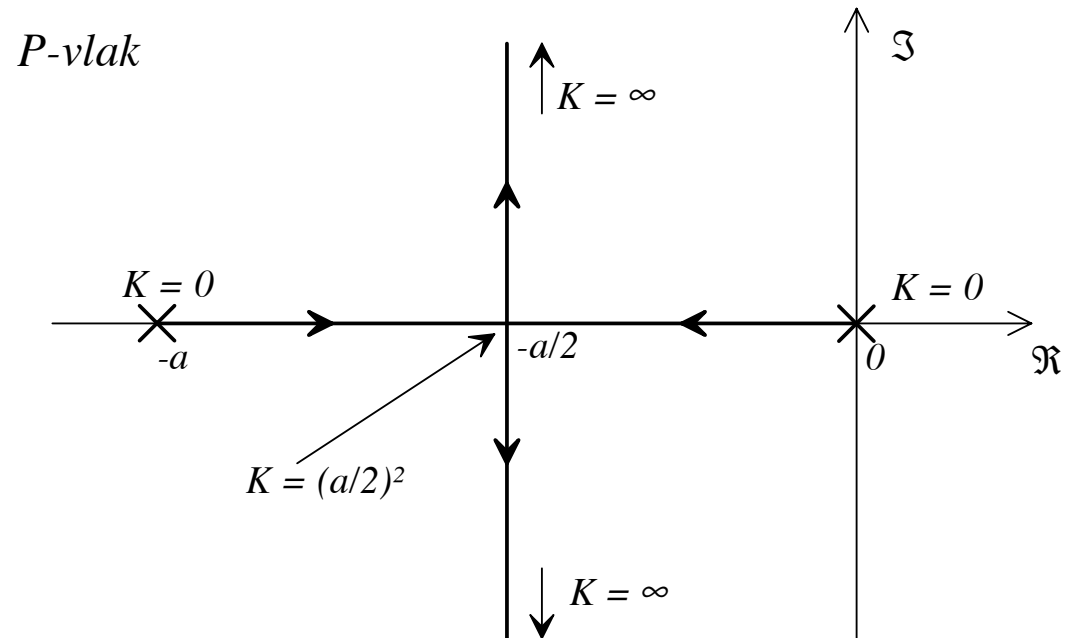
$$0 \leq K < \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

- geval 2:

$$K = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

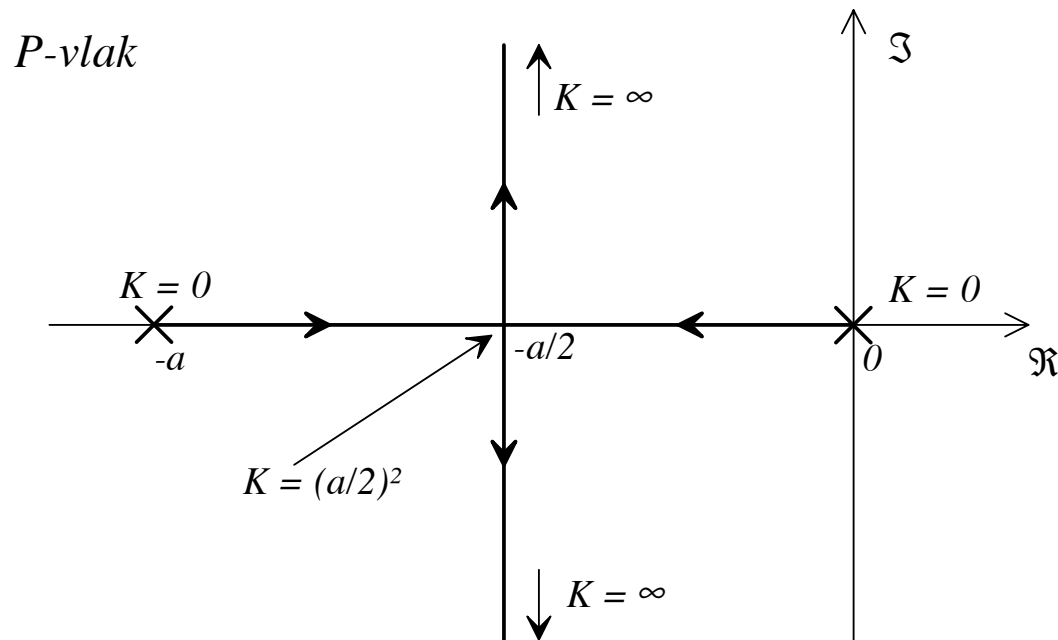
- geval 3:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 < K < \infty$$



Voorbeeld: analytische berekening polen

- Wortellijnendiagramm: conclusies?
 - geslotenlussysteem altijd absoluut stabiel
 - geslotenlussysteem relatief onstabiel bij hoge versterking



Les 5: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
 - Inleiding
 - Voorbeeld: analytische berekening polen
 - Constructieregels
 - Eigenschappen

Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems*, 2005.

URL: <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html>

Constructieregels: Concept

- Meest algemene vorm van karakteristieke vergelijking:

$$1 + G(p)H(p) = 0$$

- Hier is de openlus TF

$$G(p)H(p) = \frac{K_{RL}(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_m)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)}$$

met z_j de nulpunten en p_j de polen van de open-lus TF

- Concept grafische methode: teken wortellijnendiagram op basis van **openlus nulpunten en polen** ipv op basis van geslotenluspolen (veel moeilijker te berekenen)

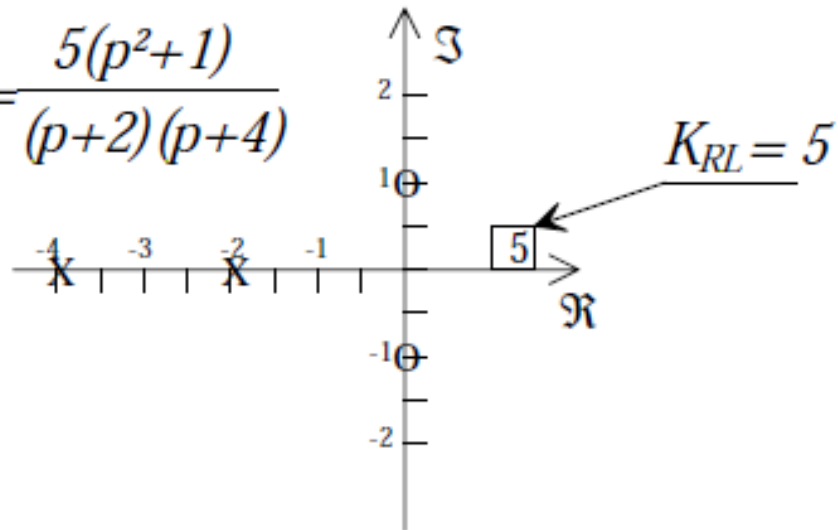
Constructieregels: Definities

- Vermenigvuldigingsfactor K_{RL} (RL-gain)
- Gelijkspanningsversterking K_D

$$K_D = \left| \frac{K_{RL} z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n} \right|$$

- Voorbeeld:

$$GH = \frac{5(p^2+1)}{(p+2)(p+4)}$$



Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

- Karakteristieke vergelijking van systeem (met versterkingsfactor K):

$$1 + KG(p)H(p) = 0 \quad \text{of} \quad KG(p)H(p) = -1$$

- Hieruit kunnen we twee voorwaarden halen:

- modulusvoorwaarde:

$$K = \frac{1}{|G(p)H(p)|}$$

- hoekvoorwaarde:

$$\angle KG(p)H(p) = 180^\circ + k360^\circ$$

Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

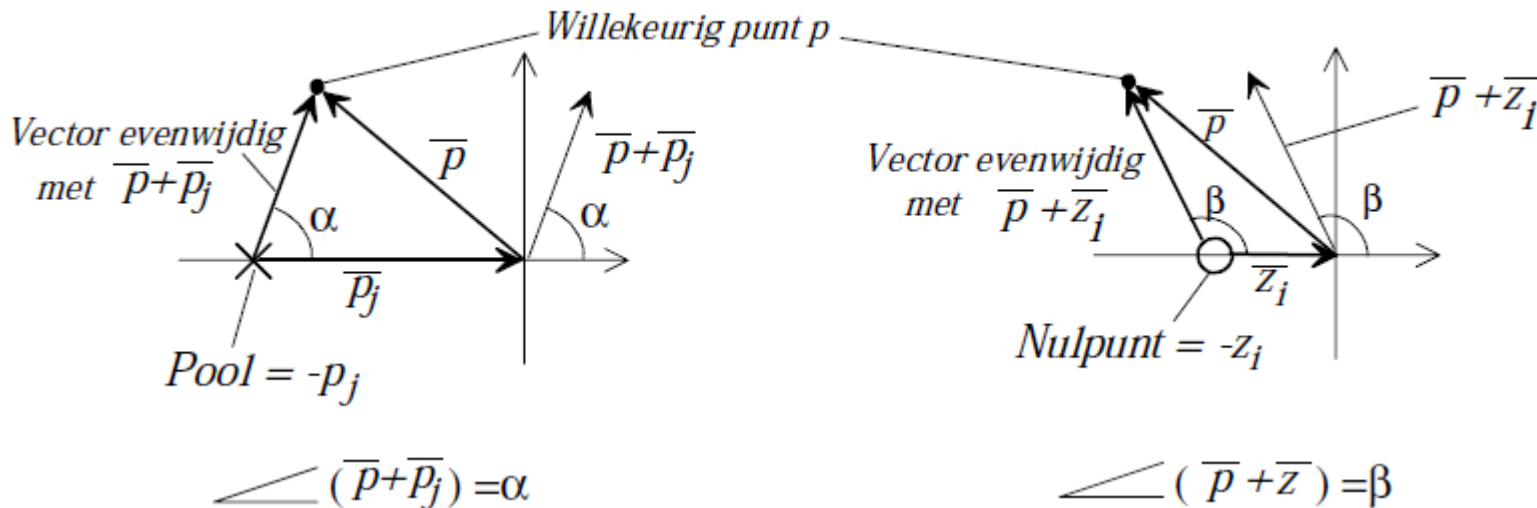
- We zoeken nu alle complexe getallen $p = \bar{p}e^{j\phi}$ die aan beide voorwaarden voldoen:
 - de hoekvoorwaarde heeft een oplossing p die voldoet aan:

$$\begin{aligned}180^\circ + k360^\circ &= \angle KG(p)H(p) \\ &= \angle G(p)H(p) \\ &= \angle \frac{K_{RL}(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_m)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)} \\ &= \angle(p + z_1) + \angle(p + z_2) + \dots + \angle(p + z_m) \\ &\quad - \angle(p + p_1) - \angle(p + p_2) - \dots - \angle(p + p_n)\end{aligned}$$

- deze oplossing kan grafisch bepaald worden (zie verder)
- deze oplossing is onafhankelijk van de versterkingsfactor K

Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

- We zoeken nu alle complexe getallen $p = \bar{p}e^{j\phi}$ die aan beide voorwaarden voldoen:
 - de hoeken $\angle(p + z_i)$ en $\angle(p + p_j)$ tussen een willekeurig punt p en de nullen en polen van de openlus TF $G(p)H(p)$ kunnen grafisch bepaald worden:



Constructieregels: Stabiliteitsvoorwaarden

- We zoeken nu alle complexe getallen $p = \bar{p}e^{j\phi}$ die aan beide voorwaarden voldoen:
 - gegeven een oplossing p voor de hoekvoorwaarde, dan kan aan de **modulusvoorwaarde** altijd voldaan worden door een gepaste versterkingsfactor K te kiezen:

$$K = \frac{1}{|G(p)H(p)|}$$

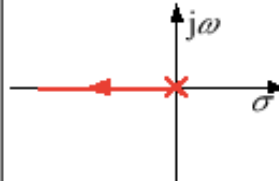
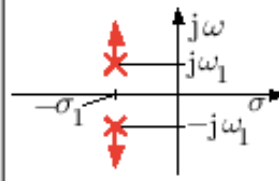
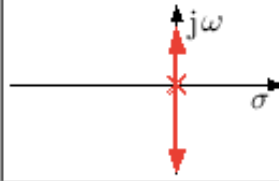
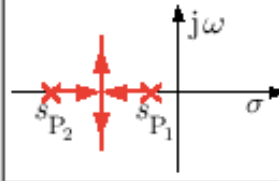
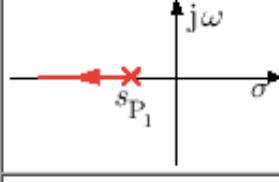
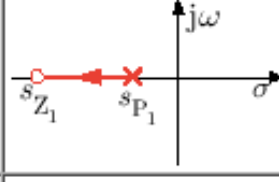

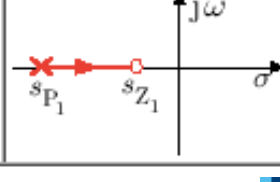
Constructieregels: overzicht

- We overlopen nu een aantal eigenschappen en regels die het tekenen van een wortellijnendiagramm vergemakkelijken:
 - aantal takken
 - beginpunten
 - eindpunten
 - takken op de reële as
 - asymptotische richting
 - breekpunten bij samenvallende polen of nulpunten
 - hoek van vertrek

Constructieregels: aantal takken

- Het aantal takken van het wortellijnendiagram is gelijk aan het aantal polen van de openlus TF $G(p)H(p)$

- Voorbeelden:

$G_0(s)$	root locus	$G_0(s)$	root locus
$\frac{k_0}{s}$		$\frac{k_0}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2}$	
$\frac{k_0}{s^2}$		$\frac{k_0}{(s - s_{P_1})(s - s_{P_2})}$	
$\frac{k_0}{s - s_{P_1}}$		$\frac{k_0(s - s_{Z_1})}{(s - s_{P_1})}$ $ s_{Z_1} > s_{P_1} $	
$\frac{k_0}{s^2 + \omega_1^2}$		$\frac{k_0(s - s_{Z_1})}{(s - s_{P_1})}$ $ s_{Z_1} < s_{P_1} $	

Constructieregels: beginpunten

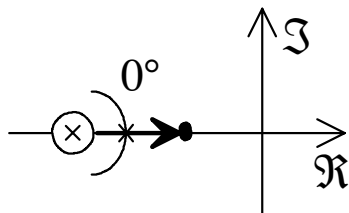
- De **beginpunten** van elke tak van het wortellijnendiagram worden bepaald door de polen van de geslotenlus TF bij een versterkingsfactor $K = 0$.
- In dit geval komen de polen van de geslotenlus TF overeen met de **polen van de openlus TF**.
- Modulusvoorwaarde: $K = 0 \Rightarrow |G(p)H(p)| = \infty$
 $\Rightarrow p = \text{pool van } G(p)H(p)$
- **Conclusie:** de beginpunten zijn de polen van de openlus TF $G(p)H(p)$

Constructieregels: eindpunten

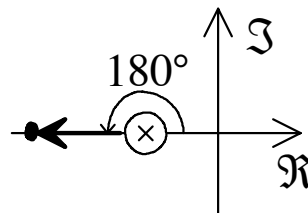
- De **eindpunten** van elke tak van het wortellijnendiagram worden bepaald door de polen van de geslotenlus TF bij een versterkingsfactor $K = \infty$.
- In dit geval komen de polen van de geslotenlus TF overeen met de **nulpunten van de openlus TF**.
- Modulusvoorwaarde: $K = \infty \Rightarrow |G(p)H(p)| = 0$
 $\Rightarrow p = \text{nulpt van } G(p)H(p)$
- Indien de openlus TF minder nulpunten (m) dan polen (n) heeft dan liggen er $n-m$ eindpunten op oneindig.
- **Conclusie:**
 - de eindpunten zijn de nulpunten van de openlus TF $G(p)H(p)$
 - er zijn $n-m$ asymptoten naar eindpunten op ∞

Constructieregels: takken op de reële as

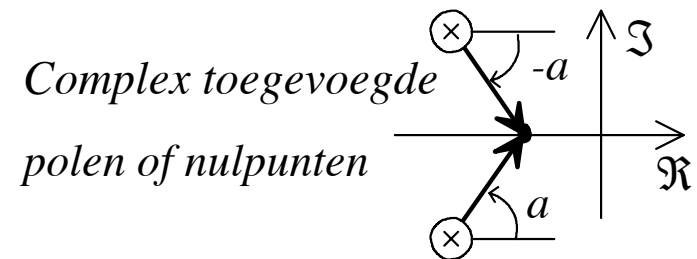
- Een punt p op de reële as maakt altijd een hoek van 0° of 180° met een reële pool of nulpunt van de openlus TF.
- Een punt p op de reële as maakt altijd tegengestelde hoeken van $-a^\circ$ en $+a^\circ$ met een complex paar polen of nulpunten van de openlus TF.



Pool of nulpunt



Pool of nulpunt



Complex toegevoegde
polen of nulpunten

- **Conclusie:** alle punten op de reële as die links gelegen zijn van een oneven aantal nulpunten of polen van de openlus TF $G(p)H(p)$ behoren tot het wortellijnendiagram

Constructieregels: asymptotische richting

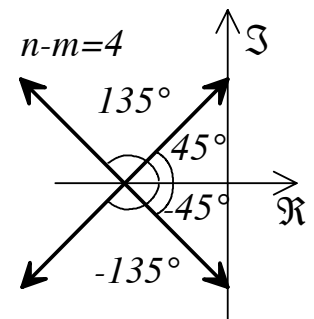
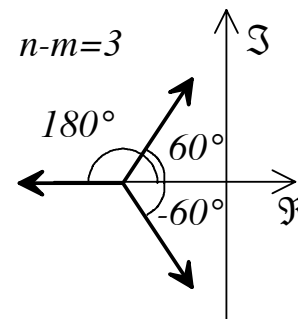
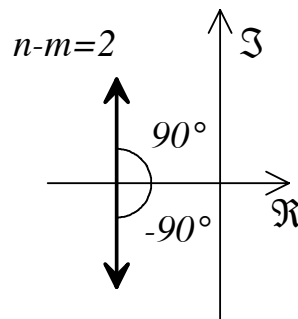
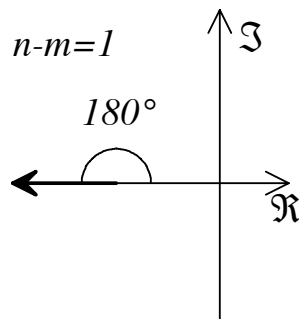
- Als openlus TF meer polen dan nulpunten heeft ($n > m$) dan lopen $n-m$ takken naar oneindig met asymptotische richting:

$$\theta = \frac{180^\circ + k360^\circ}{n - m}$$

- De asymptoten snijden de reële as in het zwaartepunt van de polen en nulpunten van de openlus TF:

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

- Voorbeelden:

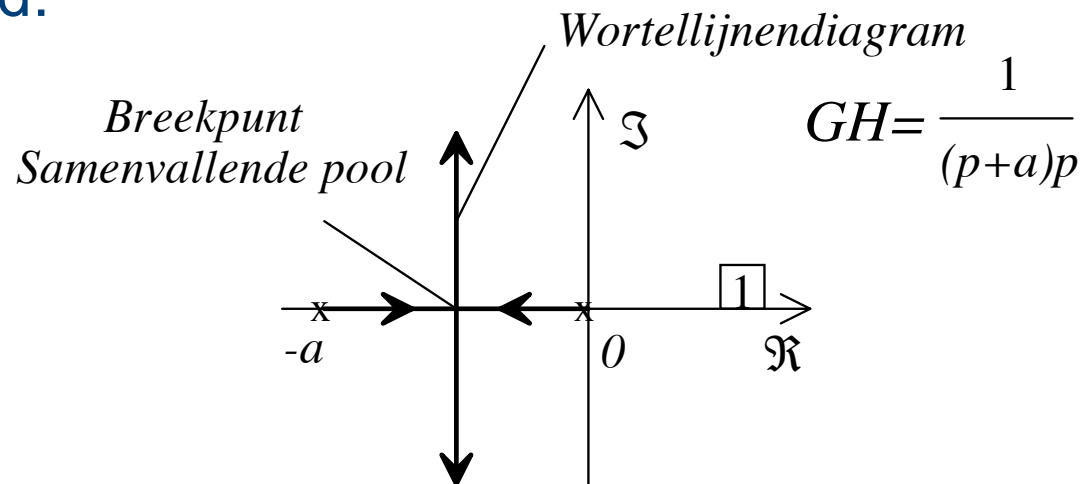


Constructieregels: breekpunten

- Wortellijnen verlaten of bereiken reële as altijd onder hoek van 90° .
- Het punt waar dit gebeurt is *breakaway/entry point* en komt overeen met dubbele pool van geslotenlus TF:

$$\frac{d}{dp} (1 + G(p)H(p)) = \frac{d}{dp} (G(p)H(p)) = 0$$

- Voorbeeld:

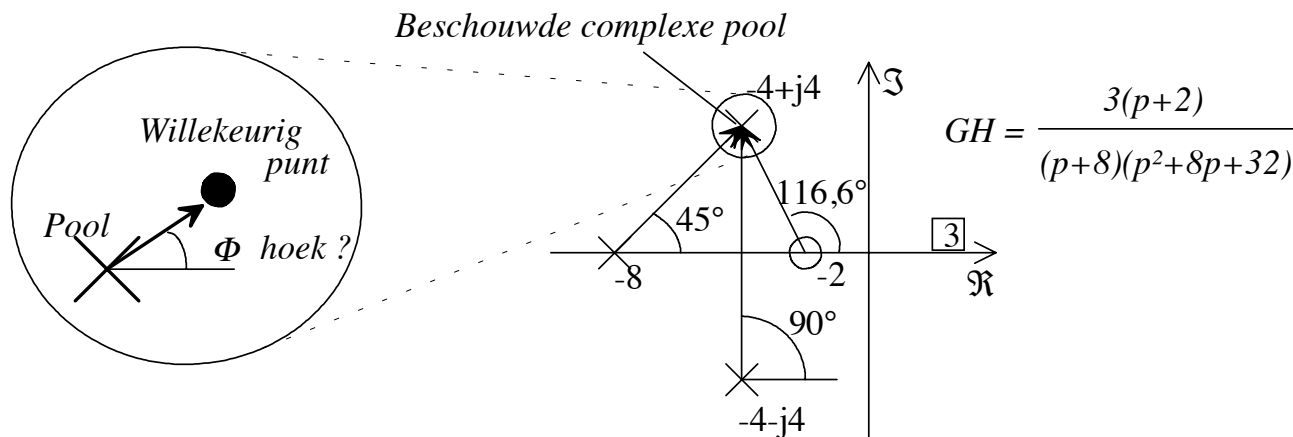


Constructieregels: hoek van vertrek

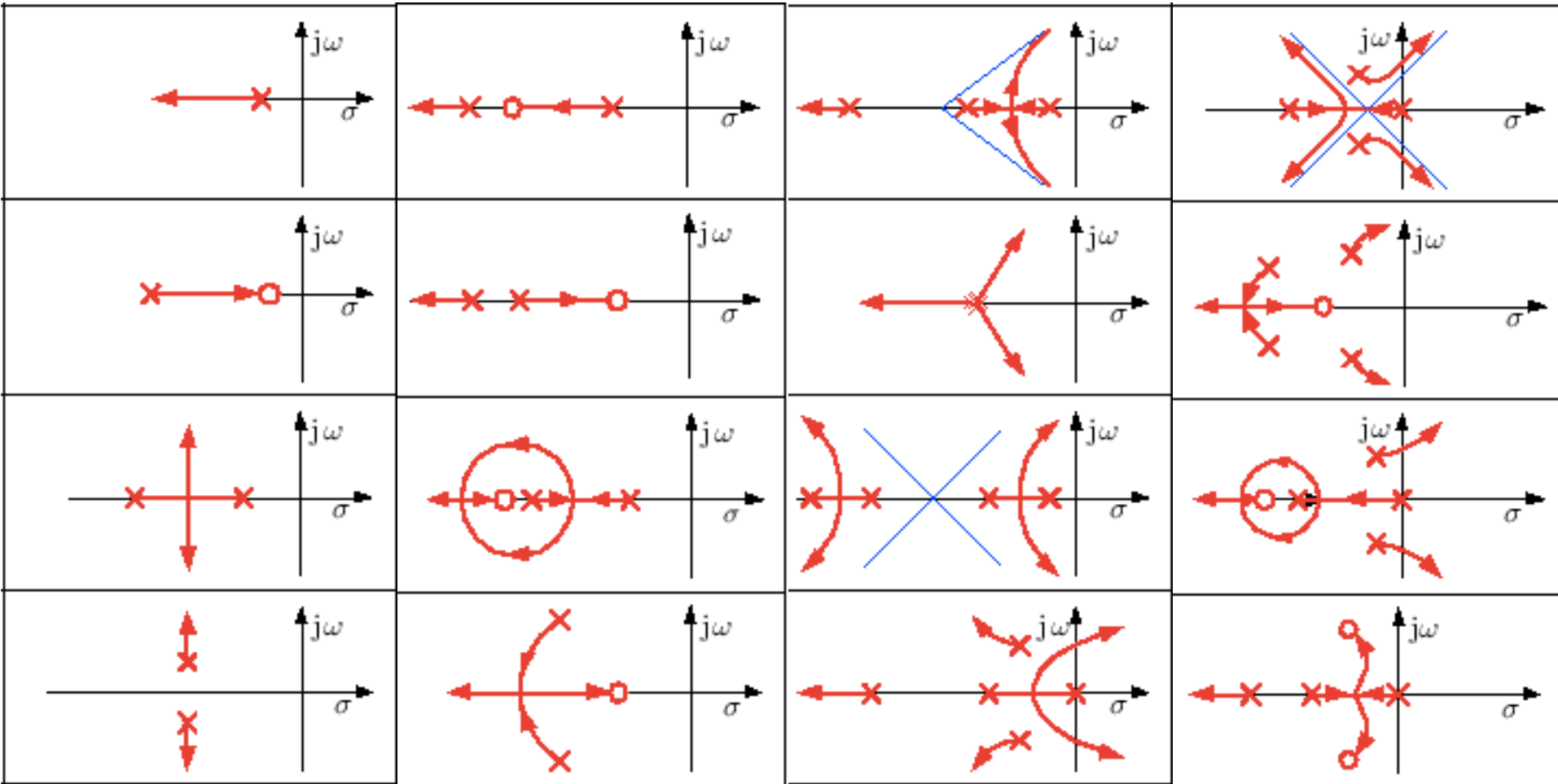
- Hoek Φ_l waarmee wortellijn vertrekt vanuit complex nulpunt z_l of pool p_l kan berekend worden uit hoekvoorwaarde:

- nulpunt:
$$\Phi_l = 180^\circ + k360^\circ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \angle(z_i - z_l) + \sum_{j=1}^n \angle(p_j - z_l)$$

- pool:
$$\Phi_l = -180^\circ - k360^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(z_i - p_l) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \angle(p_j - p_l)$$



Constructieregels: voorbeelden



Les 5: Het wortellijnendiagram

- **Het wortellijnendiagram** [Baeten, REG1, Hoofdstuk 3] [*]
 - Inleiding
 - Voorbeeld: analytische berekening polen
 - Constructieregels
 - Eigenschappen

Bijkomende referentie:

[*] Christian Schmid, “The root-locus method,” in *Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems*, 2005.

URL: <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node46.html>

Eigenschappen

- Wat kunnen we leren uit het wortellijnendiagram?
 - absolute stabiliteit
 - relatieve stabiliteit
 - natuurlijke eigenpulsatie
 - gedempte eigenpulsatie
 - *settling time*

Eigenschappen: absolute stabiliteit

- Regelsysteem is **absoluut stabiel** voor versterkingsfactoren die overeenkomen met wortellijnen in linkerhalfvlak
- **Marginale stabiliteit** wordt bereikt wanneer wortellijnen imaginaire as snijden:

$$K_{rand_stabiliteit} G(j\omega)H(j\omega) = -1$$

- Twee vergelijkingen in twee onbekenden:
oplossing geeft versterkingsfactor $K(\omega)$ waarvoor regelsysteem marginaal stabiel is op frequentie ω

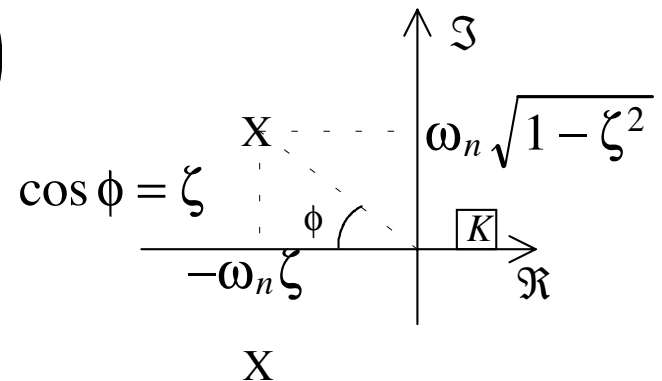
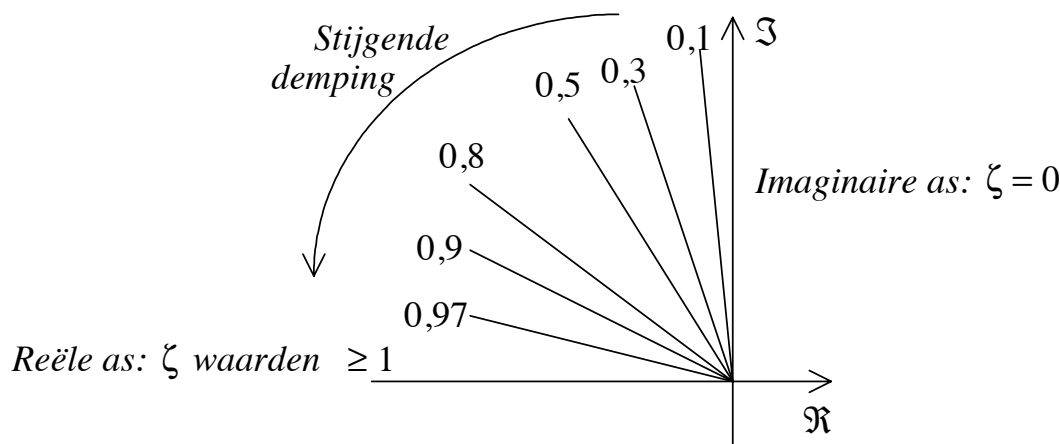
Eigenschappen: relatieve stabiliteit

- Om relatieve stabiliteit te onderzoeken benaderen we regelsysteem door 2e orde systeem:

$$TF_{2eorde} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

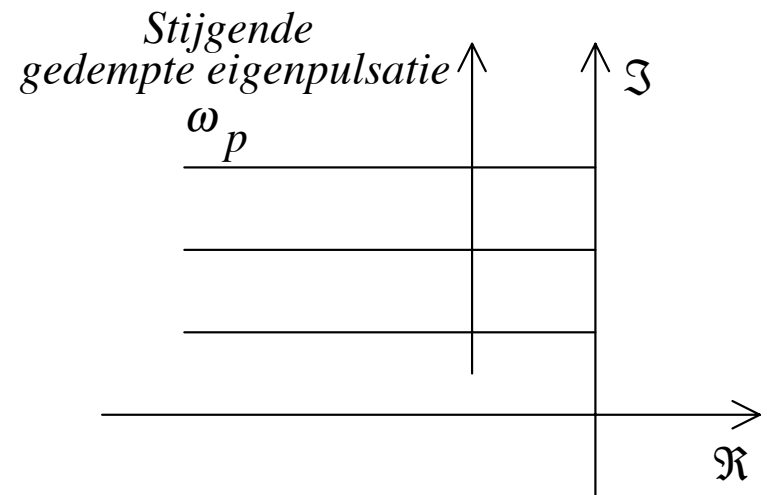
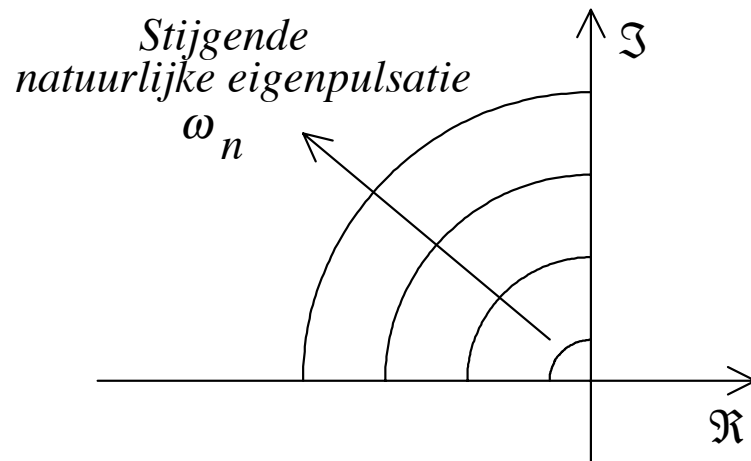
- Relatieve stabiliteit en dempingsfactor worden dan bepaald door ligging van dominante polen:

$$p_{1,2} = -\omega_n \left(\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$



Eigenschappen: eigenpulsaties

- De natuurlijke eigenpulsatie is evenredig met de reactiesnelheid van het systeem
- De gedempte eigenpulsatie is imaginair deel van pool die oscillerend gedrag van overgangsverschijnsel weergeeft



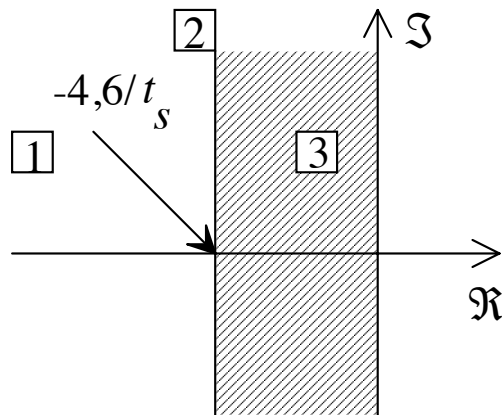
Eigenschappen: *Settling time*

- Reële deel van pool geeft snelheid waarmee systeem naar eindwaarde gaat, bv. voor zuiver 1e orde systeem:

$$\frac{1}{p + a} \rightarrow e^{-at}$$

- *Settling time* bepaalt grens van $\pm 1\%$ rond eindwaarde:

$$0,01 = e^{-at_s} \Rightarrow t_s = -4,6 / -a$$



1. *Gebied met polen met een een 'settling' tijd $< t_s$*
2. *Lijn met polen met een een 'settling' tijd $= t_s$*
3. *Gebied met polen met een een 'settling' tijd $> t_s$*