Meet- en Regeltechniek

Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen
ESAT – Departement Elektrotechniek
KU Leuven, Belgium

Meet- en Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**
  - Les 1: Inleiding en modelvorming
  - Les 2: Systemen van eerste orde
  - Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd
- **Deel 2: Analoge regeltechniek**
  - Les 4: De regelkring
  - Les 5: Het wortellijnendiagram
  - Les 6: Oefeningen wortellijnendiagram
  - Les 7: De klassieke regelaars
  - Les 8: Regelaarontwerp + oefeningen
  - Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
  - Les 10: Speciale regelstructuren
  - Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars
- **Deel 3: Digitale regeltechniek**
  - Les 12: Het discreet systeemgedrag & het discreet equivalent
  - Les 13: De discrete regelkring & de toestandsregelaar

KU LEUVEN

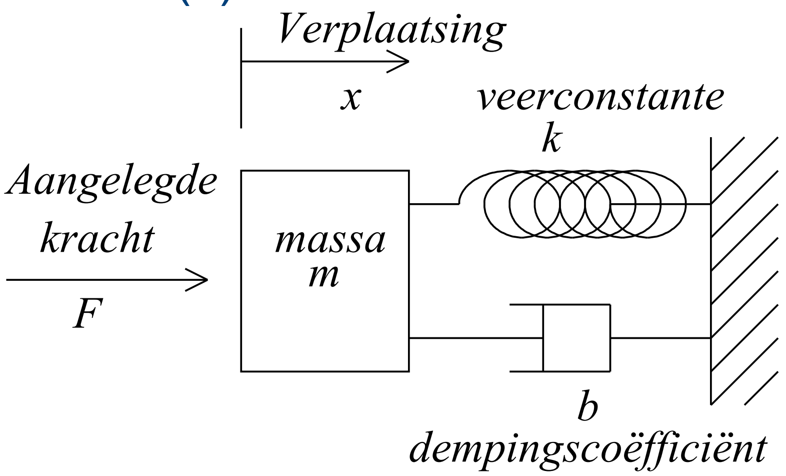
Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

KU LEUVEN

Inleidend voorbeeld (1)

- **Massa-veer-dempersysteem**
  - typevoorbeeld tweede-orde mechanisch systeem
  - komt zeer frequent voor in praktische toepassingen
  - signalen:
    - ingangssignaal = aangelegde kracht (F)
    - uitgangssignaal = verplaatsing massa (x)
  - systeemparameters:
    - massa m
    - veerconstante k
    - dempingscoëfficiënt b



Inleidend voorbeeld (2)

- **Massa-veer-dempersysteem**
  - transfertfunctie volgt uit krachtenvergelijking:

wrijvingskracht ~ snelheid

veerkracht ~ verplaatsing

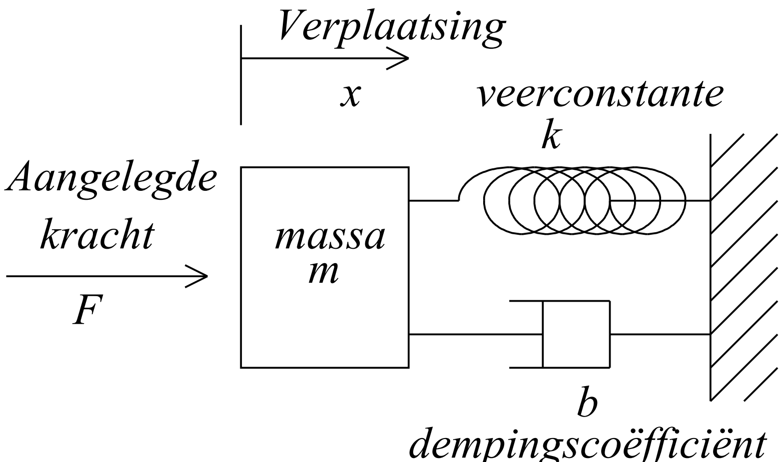
$$F(t) = m.a(t) + F_f(t) + F_x(t) = m.a(t) + b.v(t) + k.x(t)$$
$$= m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k.x(t) \quad .$$

  - Laplace-transformatie:

$$F(p) = \left(m.p^2 + b.p + k\right) X(p)$$

$$TF = \frac{X(p)}{F(p)} = \boxed{\frac{1}{m.p^2 + b.p + k}}$$

tweede orde



Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

KU LEUVEN

Transfertfunctie tweede orde systeem

- **Standaard tweede orde systeem**

$$\boxed{G(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p \ + \omega_n^2}}$$

  - ω_n: natuurlijke eigenpulsatie
  - ς: dempingscoëfficiënt of dempingsfactor
  - K: statische versterkingsfactor

- **Voorbeeld: massa-veer-dempersysteem**

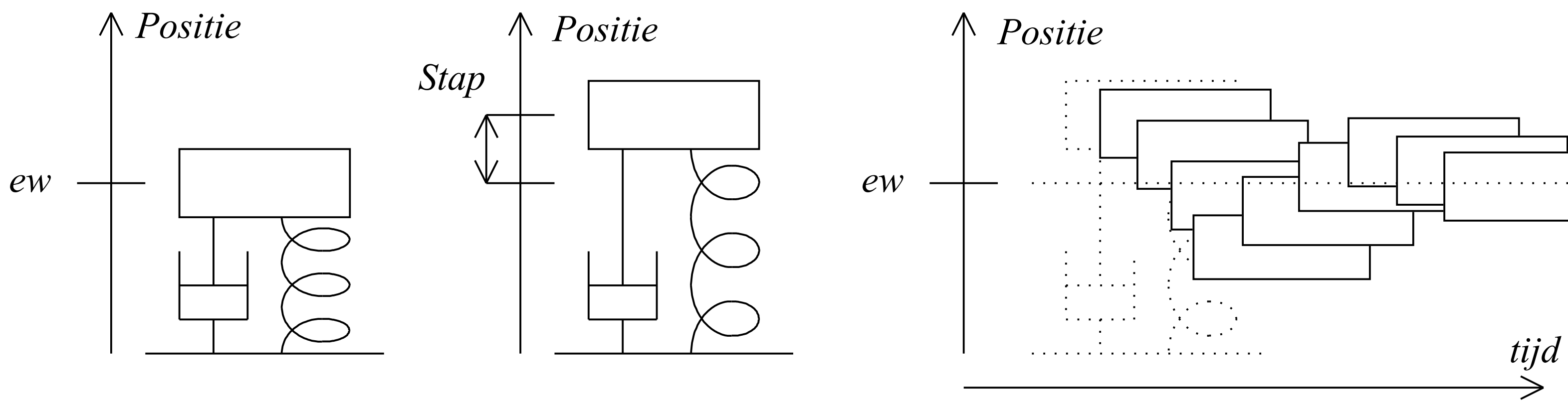
$$\frac{1}{m.p^2 + b.p + k} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p \ + \omega_n^2} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} \qquad K = \frac{1}{k}$$

Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Staprespons tweede orde systeem (1)

- **Voorbeeld: staprespons massa-veer-dempersysteem**



Oorspronkelijk systeem in evenwicht.

Uit evenwicht (ew) brengen.

Plots loslaten en de beweging opnemen i.f.v. de tijd.

- **Staprespons: 3 gevallen**
  - $\varsigma > 1$: overgedempt systeem
  - $\varsigma = 1$: kritisch gedempt systeem
  - $\varsigma < 1$: ondergedempt (oscillerend) systeem

KU LEUVEN

Staprespons tweede orde systeem (2)

- **Overgedempt systeem** $\zeta > 1$
  - er treedt geen oscillatie op in staprepons (demping te groot)
  - staprespons:

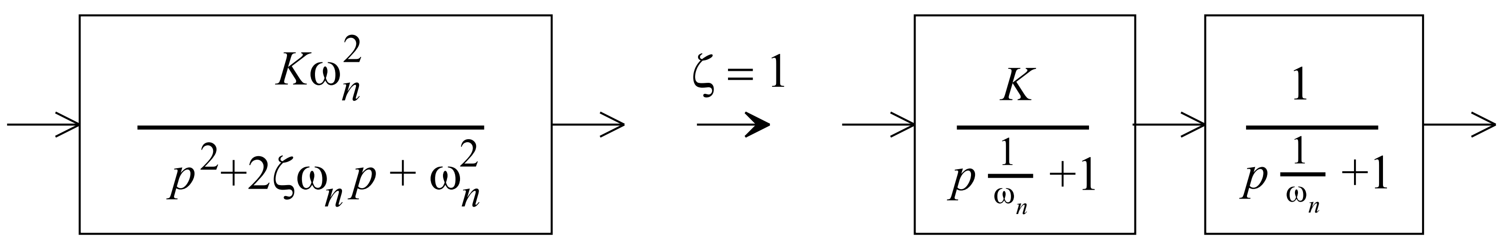
$$Staprespons_{\zeta>1} =$$
$$K\left(1 - \frac{\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\omega_n t\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} - \frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\omega_n t\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\right)$$

    - twee exponentieel afnemende termen
    - evenwichtswaarde = *K*
  - twee reële polen: $P_{1,2} = -\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)$
  - overgedempt tweede-orde systeem
    = cascade van twee eerste-orde systemen

KU LEUVEN

Staprespons tweede orde systeem (3)

- **Kritisch gedempt systeem** $\zeta = 1$
  - er treedt geen oscillatie of doorschot op in staprepons
  - snellere reactie dan overgedempt systeem
  - staprespons: $Staprespons_{\zeta=1} = K\left[1 - (1+\omega_n t)\, e^{-\omega_n t}\right]$
  - één dubbele reëele pool: $P_1 = P_2 = -\omega_n$
  - kritisch gedempt tweede-orde systeem
    = cascade van twee eerste-orde systemen met gelijke polen



KU LEUVEN

Staprespons tweede orde systeem (4)

- **Ondergedempt systeem** $\zeta < 1$
  - gedempte oscillatie
  - staprespons:

$$Staprespons_{\zeta<1} = K\left(1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t + \mathrm{bgtg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

    - gedempte sinus rond evenwichtswaarde *K*
  - twee complex toegevoegde polen:

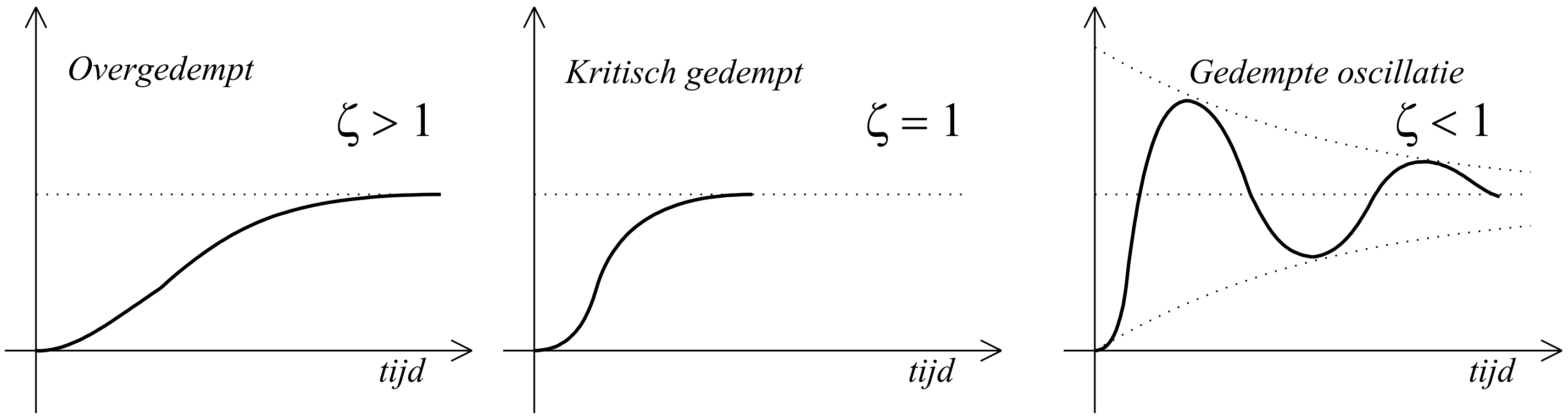
$$P_1 = -\omega_n\left(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad \text{en} \quad P_1^* = -\omega_n\left(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

    - reëel deel ~ dempingsfactor
    - imaginair deel = pulsatie gedempte oscillatie

      = gedempte eigenpulsatie: $\boxed{\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

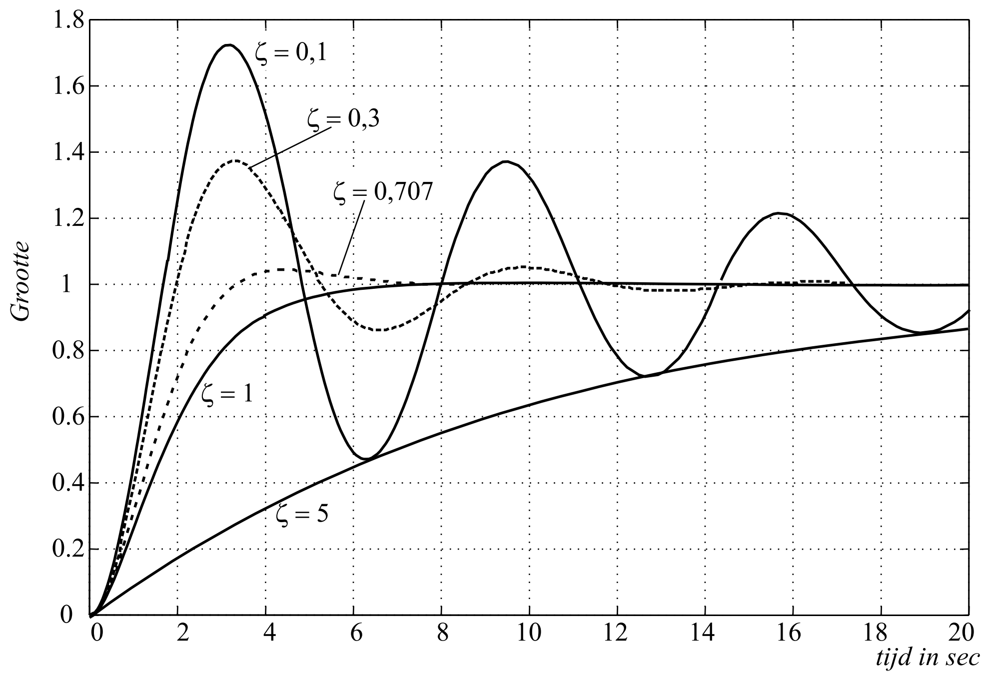
Stapresponse tweede orde systeem (5)

- **Staprespons: schematisch overzicht 3 gevallen**

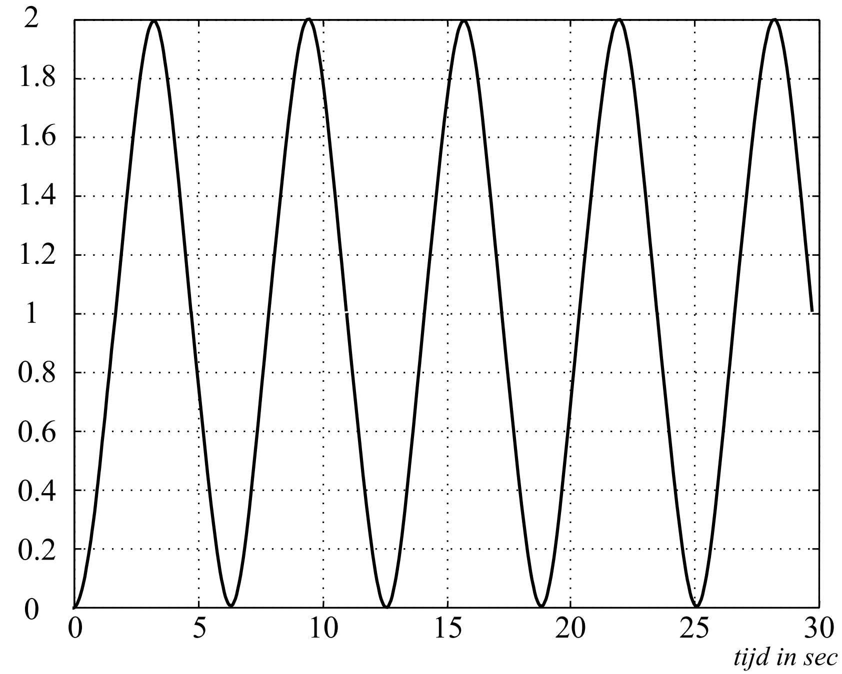


Staprespons tweede orde systeem (6)

- **Voorbeeld:**
  - tweede orde systeem met $\omega_n = 1\ \mathrm{rad/s},\ K = 1$



overgedempt
kritisch gedempt
ondergedempt



ongedempt (ς = 0)

KU LEUVEN

Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

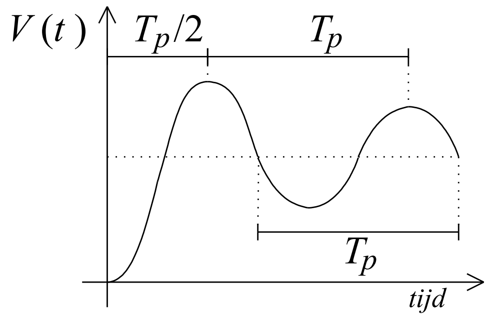
- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

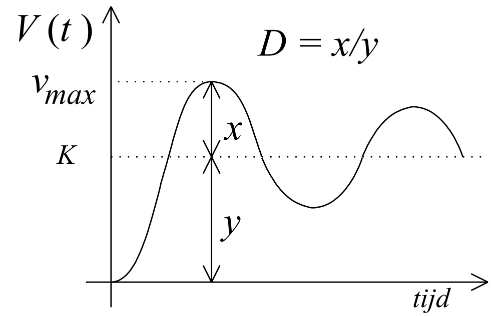
KU LEUVEN

Doorschot

- **Definitie**
  - doorschot (overshoot): $$\boxed{D = \frac{V_{stap\,\max} - K}{K}}$$
  - merk op:

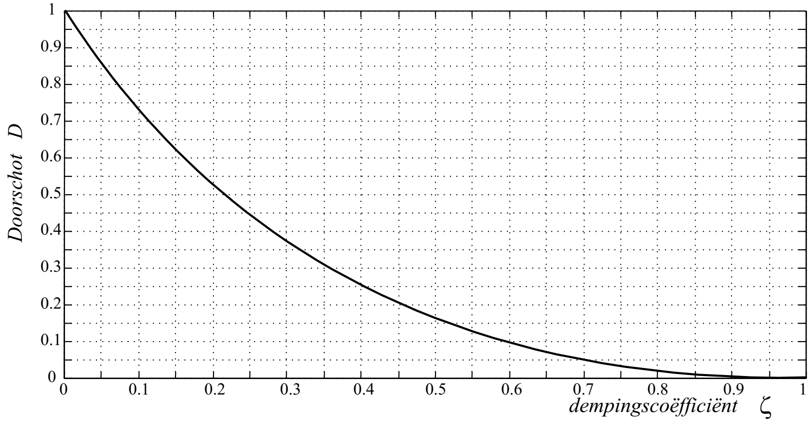
$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$





- **Verband met dempingsfactor**

$$\begin{cases} D = e^{\dfrac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ \zeta = \dfrac{-\ln D}{\sqrt{\ln^2 D + \pi^2}} \end{cases}$$



KU LEUVEN

Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Frequentierespons (1)

- **Magnitude- en faserespons**
  - frequentierespons volgt uit transfertfunctie ($p = j\omega$):

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p \ + \omega_n^2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega}$$

  - magnituderespons:

$$M = |G(j\omega)| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

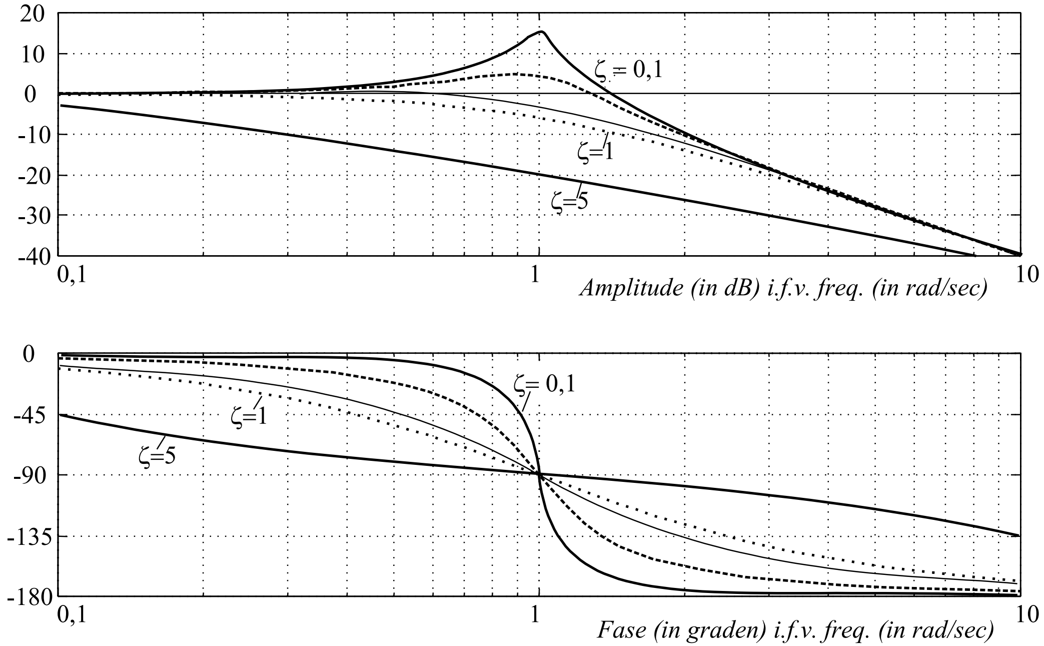
    wordt vaak uitgedrukt m.b.v. genormeerde pulsatie $u = \omega/\omega_n$
  - faserespons:

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\mathrm{bgtg}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad \text{of} \quad \varphi = -\mathrm{bgtg}\left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2}\right)$$

KU LEUVEN

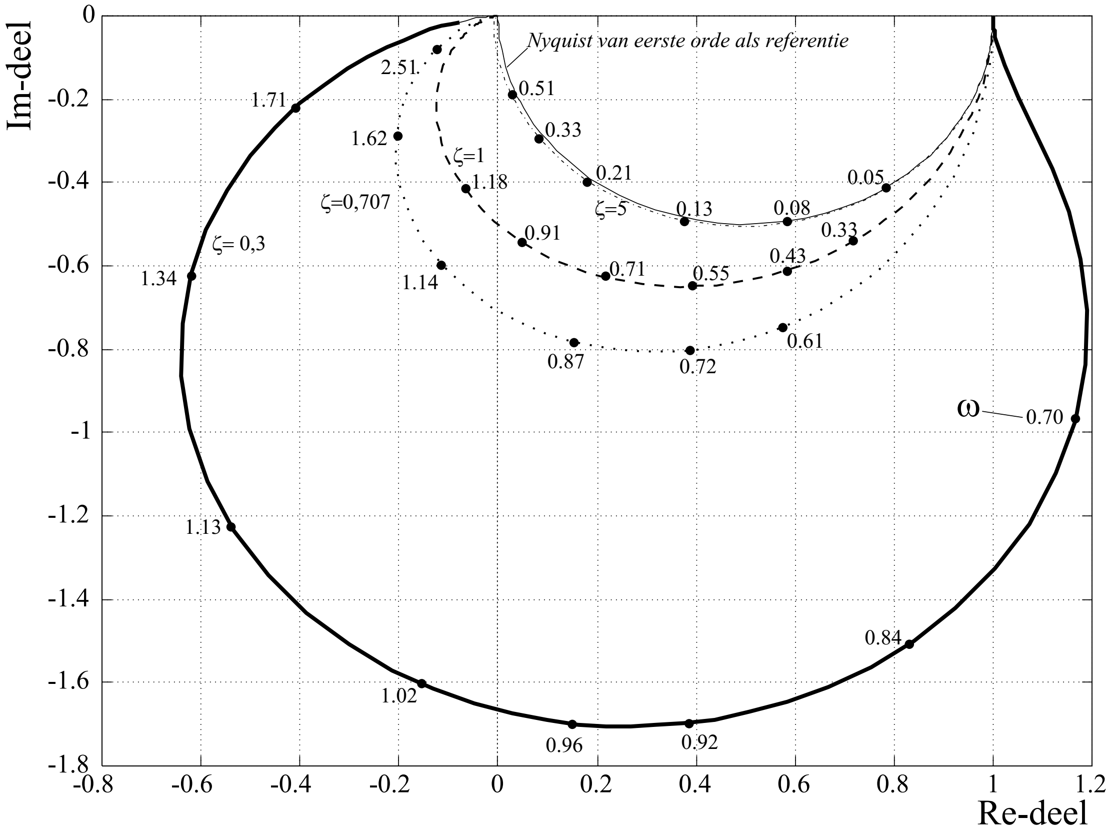
Frequentierespons (2)

- **Bode-diagram**
  - tweede orde systeem met $\omega_n = 1 \text{ rad/s}, \; K = 1$
  - asymptoten:
    - $\varsigma \geq 1$: sommatie asymptoten twee eerste orde systemen
    - $\varsigma < 1$: horizontaal tot breekpunt $\omega = \omega_n$, nadien 40 dB/decade dalend



Frequentierespons (3)

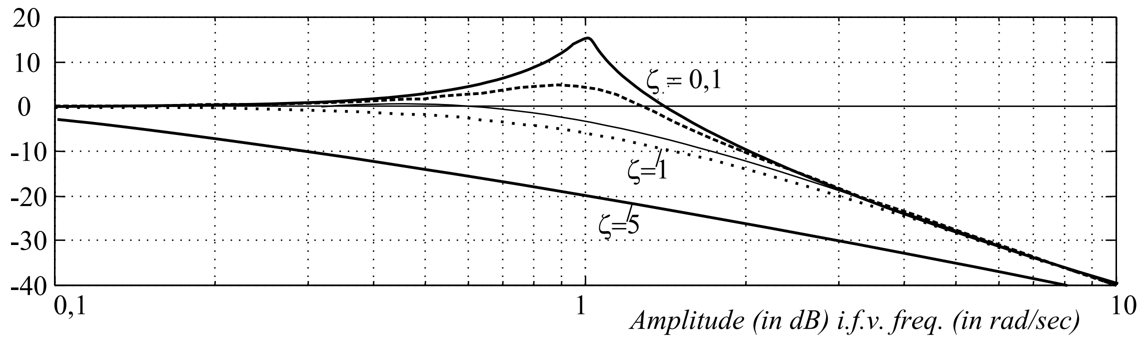
- **Nyquist-diagram**
  - tweede orde systeem met $\omega_n = 1 \text{ rad/s}, \; K = 1$



Frequentierespons (4)

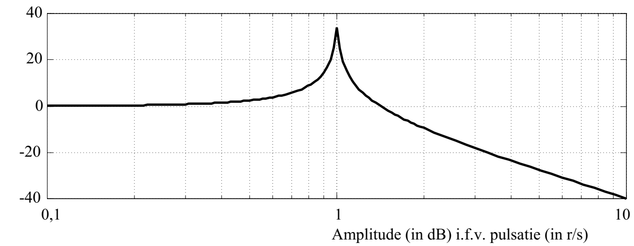
- **Resonantie**
  - voor kleine ς vertoont Bode-diagram resonantiepiek

$$\zeta \le \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

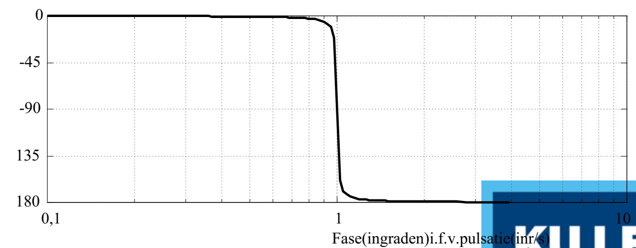


$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\max_{\omega=0\to\infty} |G(j\omega)| = |G(j\omega_r)| = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



  - ongedempt systeem (ς → 0):
    - resonantiepiek → ∞
    - fasesprong 180°

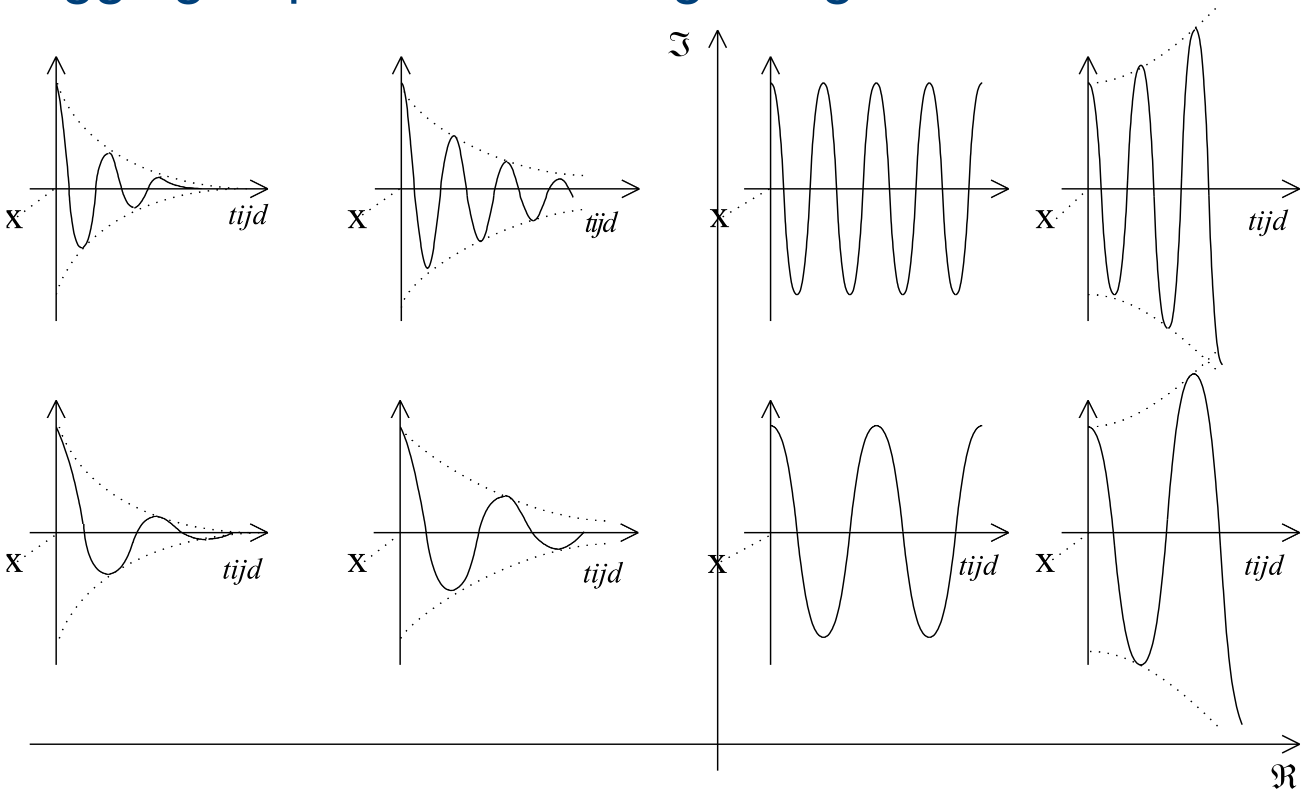


Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Nulpunten-polen-diagram

- **Polen**
  - twee reële ($\varsigma \geq 1$) of complex toegevoegde ($\varsigma < 1$) polen
  - ligging bepaalt transiënt gedrag en stabiliteit



Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

KU LEUVEN

Hogere orde systemen

- **Modelvorming hogere orde systemen**
  - eerste orde systemen: 2 parameters K en τ
  - tweede orde systemen:
    - ondergedempt: 3 parameters K, ω_n en ς
    - overgedempt: 3 parameters K, τ_1 en τ_2
  - hogere orde systemen:
    - opdelen in cascade van eerste en tweede orde systemen
    - model is benadering van werkelijkheid!
    - orde kan oneindig groot worden

KU LEUVEN

Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

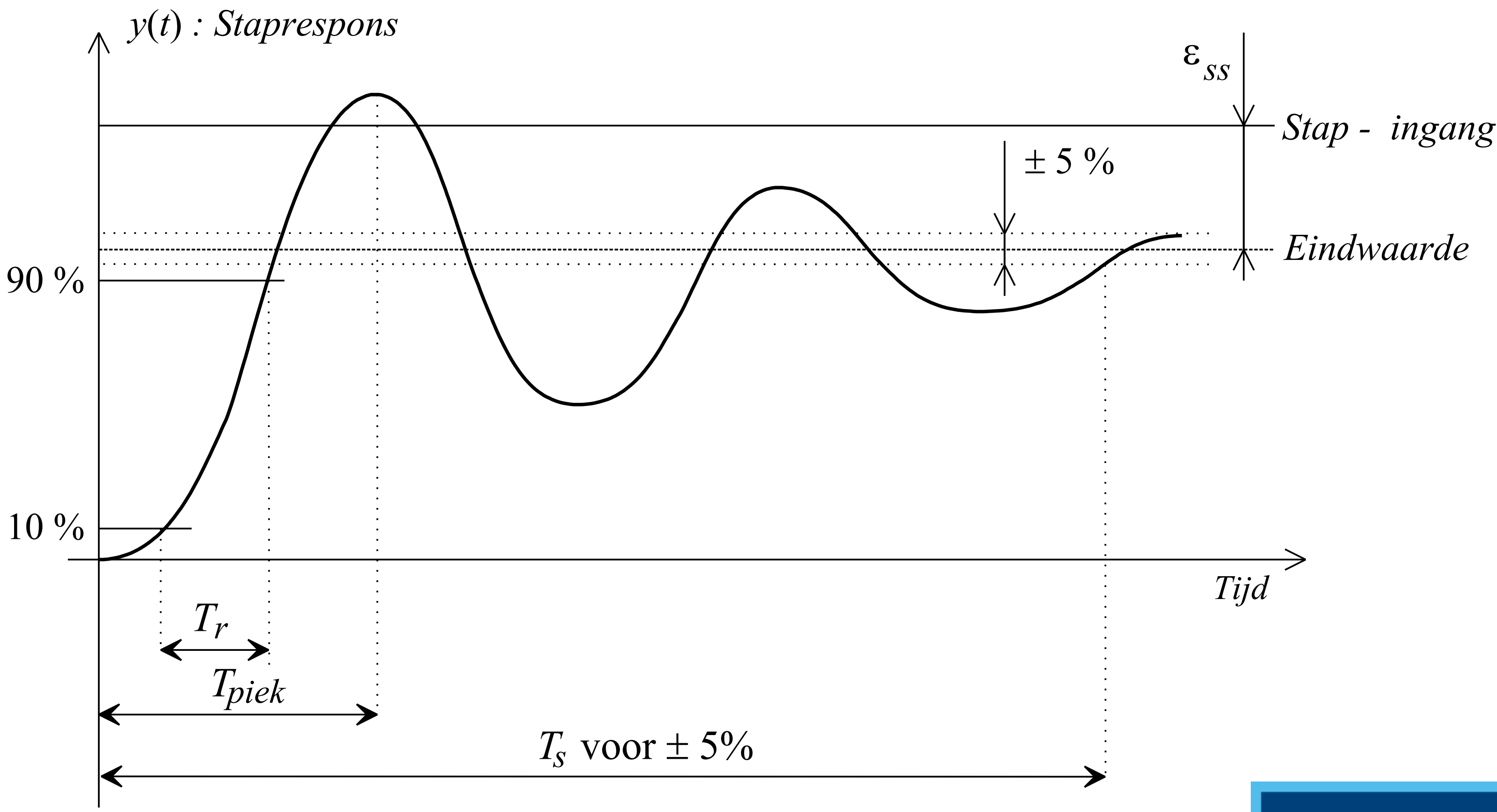
KU LEUVEN

Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde (1)

- **Staprespons hogere orde systemen**
  - maximum doorschot *D* (% van stapgrootte)
  - aantal oscillaties
  - stijgtijd (*rise time*) T_r: tijd van 10% naar 90% staprespons
  - eindwaardetijd (*settling time*) T_s: tijd tot x% evenwichtswaarde
  - piektijd (peak time) T_{piek}: tijd tot eerste maximum staprespons
  - statische fout (*steady state error*): fout in evenwichtswaarde

Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde (2)

- **Staprespons hogere orde systemen**



Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Frequentierespons

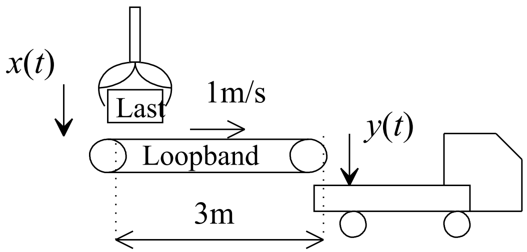
- **Frequentierespons hogere orde systemen**
  - gebaseerd op hogere orde systeemmodel = cascade van eerste en tweede orde systemen
  - magnituderespons: totale vesterking = product afzonderlijke versterkingen = som afzonderlijke versterkingen in dB
  - faserespons: totale faseverschuiving = som afzonderlijke faseverschuivingen

Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Stapresppons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

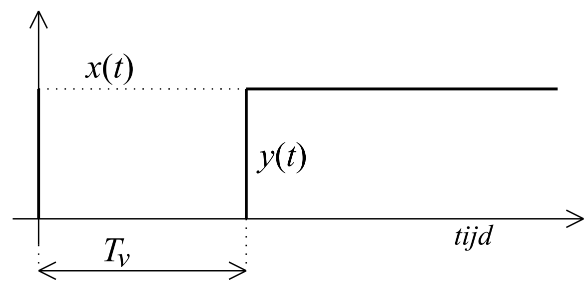
Systemen met dode tijd (1)

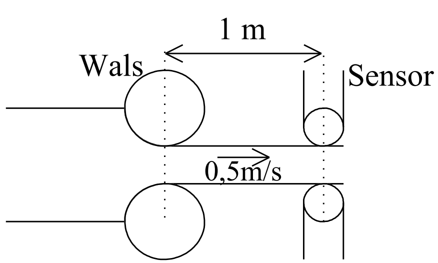
- **Dode tijd = Looptijd = Vertragings- of voortplantingstijd**
  - tijd tussen aanzet ingangssignaal en eerste reactie systeem
  - voorbeelden:



Voorbeeld 1

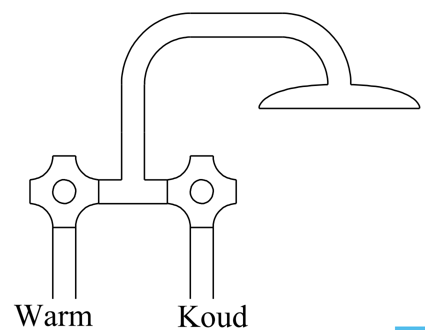
T_v (= 3 s)





Voorbeeld 2

T_v(= 2 s)



Voorbeeld 3

Systemen met dode tijd (2)

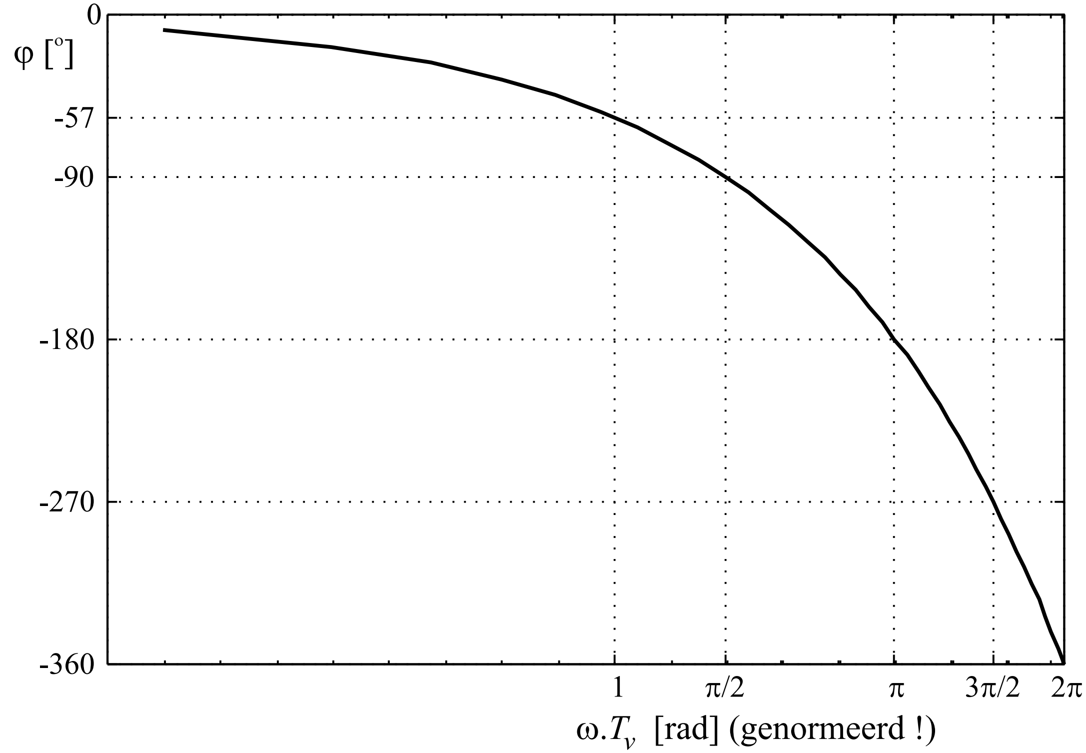
- **Dode tijd = zuivere vertraging**
  - ingangs-/uitgangsverband:

$$y(t) = x(t - T_v)$$

  - transfertfunctie:

$$Y(p) = X(p)e^{-pT_v}$$

  - Bode-diagram:
    - magnitude = 0 dB
    - fase = negatieve exponentiële



Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd

- **Systemen van tweede orde** [Baeten, SYST, Hfst. 4, 4.1 – 4.6]
  - Inleidend voorbeeld
  - Transferfunctie van tweede orde systeem
  - Staprespons van tweede orde systeem
  - Doorschot
  - Frequentierespons
  - Nulpunten-polen-diagram
- **Hogere orde systemen en dode tijd** [Baeten, SYST, Hfst. 5]
  - Hogere orde systemen
  - Tijdsdomeinspecificaties voor hogere orde
  - Frequentierespons
  - Systemen met dode tijd
  - Frequentie-analyse van systeem met dode tijd

Frequentie-analyse systeem met dode tijd (1)

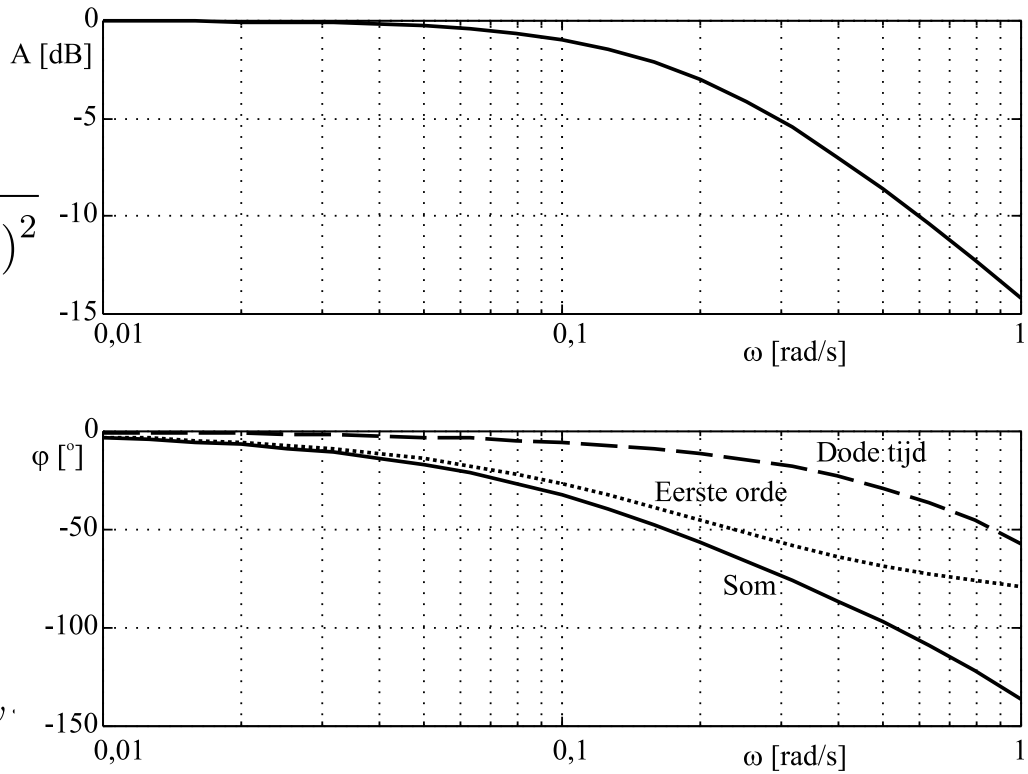
- **Bode-diagram: afwijkingen t.g.v. dode tijd**
  - frequentierespons: $G(j\omega) = e^{-j\omega Tv} = \cos\omega T_v - j\sin\omega T_v$
  - magnituderespons:

$$M = |G(j\omega)|$$
$$= \sqrt{(\cos\omega T_v)^2 + (\sin\omega T_v)^2}$$
$$= 1$$ = geen afwijking

  - faserespons:

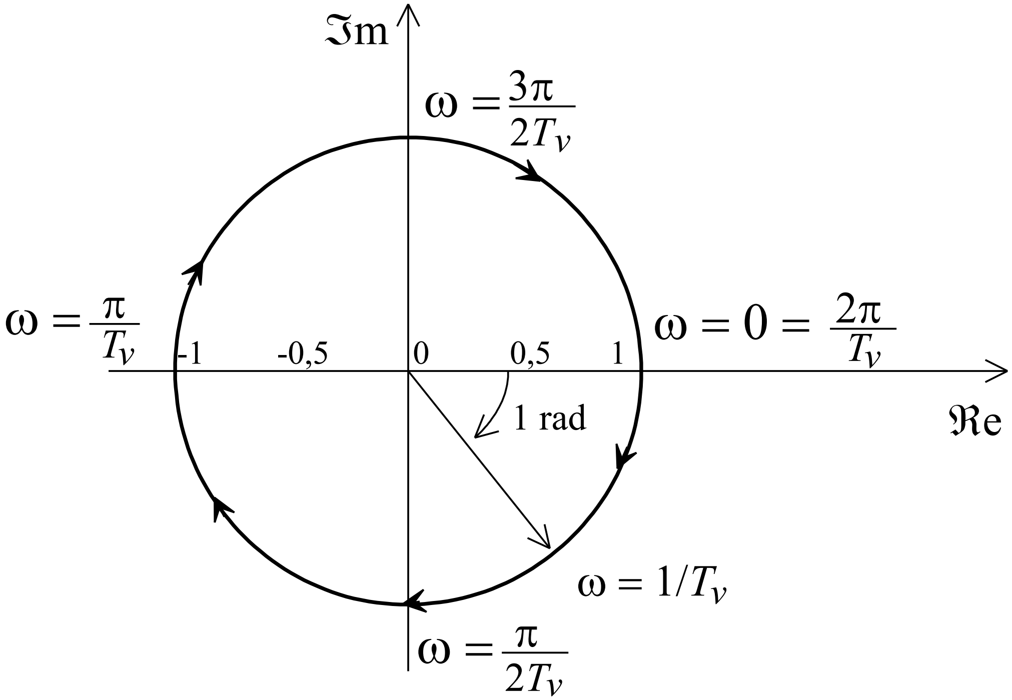
$$\varphi = \mathrm{bgtg}\left[\frac{-\sin\omega T_v}{\cos\omega T_v}\right]$$
$$= \mathrm{bgtg}\left[-\mathrm{tg}\left(\omega T_v\right)\right] = -\omega T_v.$$

  - voorbeeld: $G(p) = \dfrac{e^{-p}}{1+5p}$



Frequentie-analyse systeem met dode tijd (2)

- **Nyquist-diagram**
  - Nyquist-diagram zuivere vertraging = cirkel
  - gelijkmatige ω-verdeling langs cirkel



KU LEUVEN