KU LEUVEN

Meet- en Regeltechniek

Les 2: Systemen van eerste orde

Prof. dr. ir. Toon van Waterschoot

Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen
ESAT – Departement Elektrotechniek
KU Leuven, Belgium

Meet- en Regeltechniek: Vakinhoud

- **Deel 1: Systeemtheorie**
  - Les 1: Inleiding en modelvorming
  - Les 2: Systemen van eerste orde
  - Les 3: Systemen van tweede & hogere orde en met dode tijd
- **Deel 2: Analoge regeltechniek**
  - Les 4: De regelkring
  - Les 5: Het wortellijnendiagram
  - Les 6: Oefeningen wortellijnendiagram
  - Les 7: De klassieke regelaars
  - Les 8: Regelaarontwerp + oefeningen
  - Les 9: Systeemidentificatie en regelaarsinstelling
  - Les 10: Speciale regelstructuren
  - Les 11: Niet-lineaire regeltechniek & aan-uit regelaars
- **Deel 3: Digitale regeltechniek**
  - Les 12: Het discreet systeemgedrag & het discreet equivalent
  - Les 13: De discrete regelkring & de toestandsregelaar

KU LEUVEN

Les 2: Systemen van eerste orde

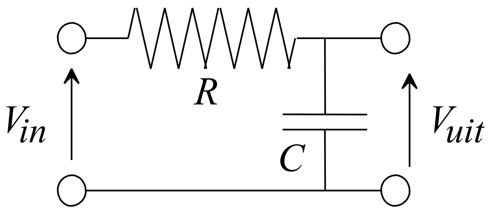
- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
  - Inleiding & Voorbeeld
  - Transferfunctie van eerste orde systeem
  - Systeemrespons van eerste orde systeem
  - Systeemdiagram van eerste orde systeem
  - Bijzondere eerste orde systemen
  - Samenvatting

Inleiding

- **Systeem van eerste orde**
  - eenvoudigste systeem dat we kunnen voorstellen (naast zuivere versterking/verzwakking = “nulde” orde systeem)
  - laat toe om op eenvoudige manier verschillende “voorstellingswijzen” en eigenschappen te introduceren:
    - systeemresponsen: tijd- en frequentierespons
    - systeemdiagrammen: Bode-, Nyquist-, Black/Nichols-, nulpunten-polen-diagram
    - eigenschappen: integrerende vs. differentiërende werking
  - eerste orde systemen komen in alle ingenieursdisciplines voor (elektrotechniek, mechanica, thermodynamica, hydraulica, …) en hebben altijd dezelfde transfertfunctie

Voorbeeld

- **Elektrisch eerste orde systeem: RC-kring**



  - afleiding 1: spanningsdeling over R en C

$$\mathrm{TF} = \frac{V_{uit}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{1/pC}{R + 1/pC} = \boxed{\frac{1}{1 + RCp}} \rightarrow \text{eerste orde}$$

  - afleiding 2: spanning-stroomverband + Laplace-transformatie

$$V_{in}(t) = Ri(t) + V_{uit}(t) \quad \text{met} \quad V_{uit}(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \text{of} \quad i(t) = C\frac{dV_{uit}(t)}{dt}$$

$$V_{in}(p) = (RCp + 1)\, V_{uit}(p) \quad \rightarrow \quad \frac{V_{uit}(p)}{V_{in}(p)} = \boxed{\frac{1}{1 + RCp}}$$

Les 2: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
  - Inleiding & Voorbeeld
  - Transferfunctie van eerste orde systeem
  - Systeemrespons van eerste orde systeem
  - Systeemdiagram van eerste orde systeem
  - Bijzondere eerste orde systemen
  - Samenvatting

Transferfunctie eerste orde systeem (1)

- **Orde van een systeem**

  = hoogste macht van *p* in noemer transfertfunctie

  = graad van differentiaalvergelijking die systeem beschrijft

  (= orde hoogste afgeleide in differentiaalvergelijking)

- **Eerste orde transfertfuncties**
  - fysische systemen: graad teller ≤ graad noemer
  - vier mogelijke eerste orde transfertfuncties:

$$\frac{1}{\tau_i p} \quad , \quad \frac{1}{1+\tau p} \quad , \quad \frac{\tau_d p}{1+\tau p} \quad , \quad \frac{1+\tau_v p}{1+\tau p}$$

  - telkens kan ook nog versterkingsfactor *K* worden toegevoegd

KU LEUVEN

Transferfunctie eerste orde systeem (2)

- **Eerste orde transfertfuncties**
  - meest gangbare vorm:

$$TF_{1e\ orde} = \frac{K}{1+\tau p}$$

    - K = statische versterking [dimensieloos]
    - τ = tijdconstante [seconden]
  - zuivere integrator/differentiator:

$$TF_{int.} = \frac{1}{\tau_i p} \quad \text{en} \quad TF_{diff.} = \tau_d p$$

    - τ_i = integratietijdconstante
    - τ_d = differentiatietijdconstante

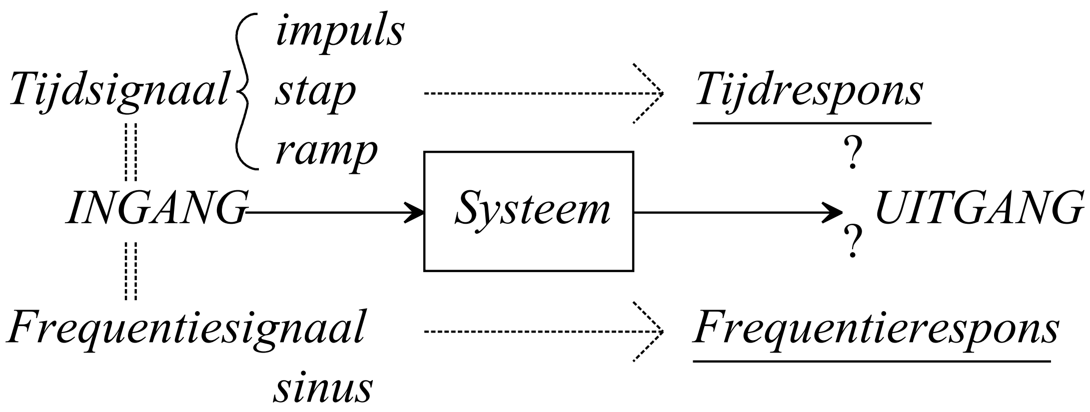
Les 2: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
  - Inleiding & Voorbeeld
  - Transferfunctie van eerste orde systeem
  - Systeemrespons van eerste orde systeem
    - tijdrespons
    - frequentierespons
  - Systeemdiagram van eerste orde systeem
  - Bijzondere eerste orde systemen
  - Samenvatting

KU LEUVEN

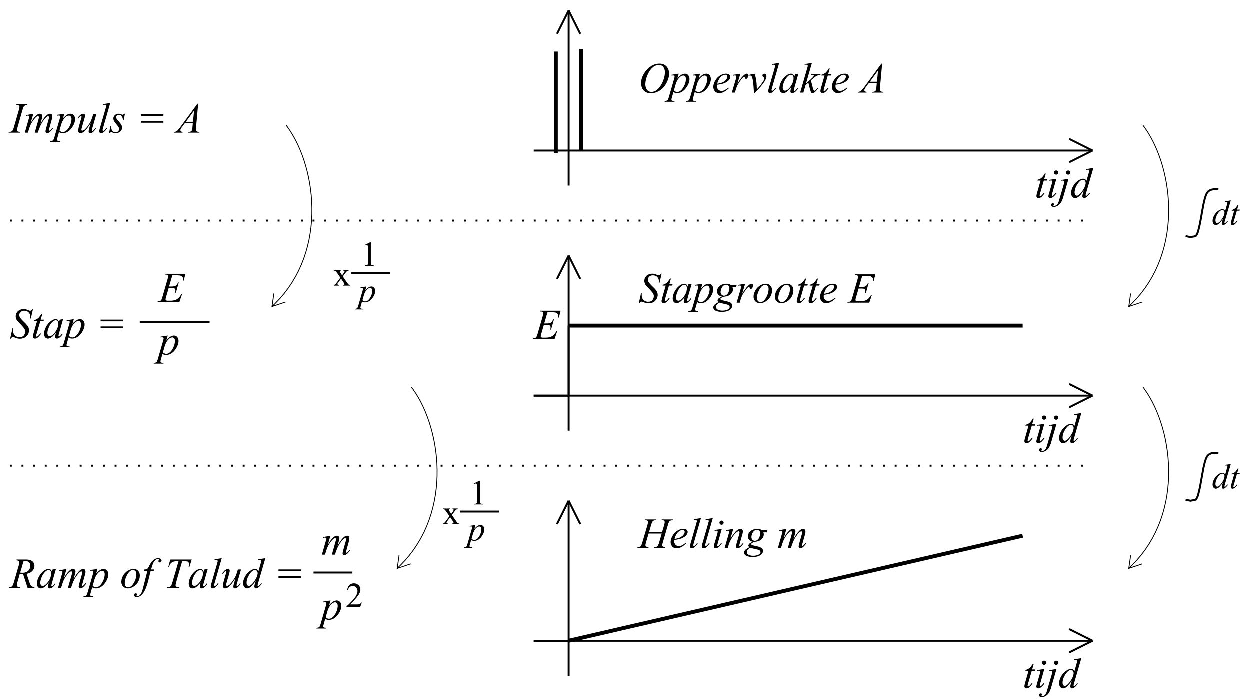
Systeemrespons eerste orde systeem (1)

- **Systeemrespons**
  - lineair tijdsinvariant systeem heeft unieke reactie op welbepaald ingangssignaal
  - systeemidentificatie/-analyse: gekend ingangssignaal aanleggen & uitgangssignaal opmeten
  - keuze ingangssignaal hangt af van beoogde analyse



Systeemrespons eerste orde systeem (2)

- **Tijdrespons (1)**
  - drie meest voorkomende ingangssignalen:



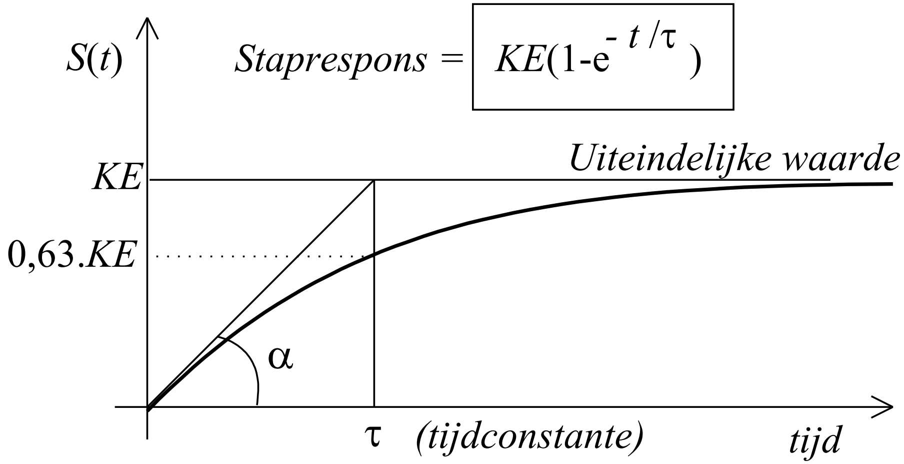
Systeemrespons eerste orde systeem (3)

- **Tijdrespons (2)**
  - staprespons Laplace-domein:

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot \frac{E}{p}$$

  - stapresponse tijdsdomein (via partieelbreuksplitsing):

$$S(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = KE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$\alpha = \mathrm{bgtg}\left(\frac{KE}{\tau}\right)$$

Systeemrespons eerste orde systeem (4)

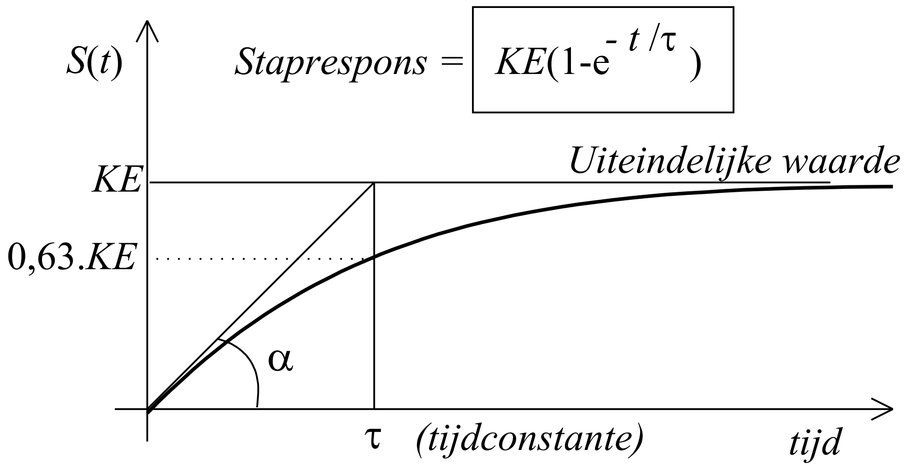
- **Tijdrespons (3)**
  - tijdconstante *τ*

    = tijd waarbij staprespons 63% van evenwichtswaarde bereikt

    = tijd waarbij lineaire respons met hoek *α* evenwichtswaarde bereikt

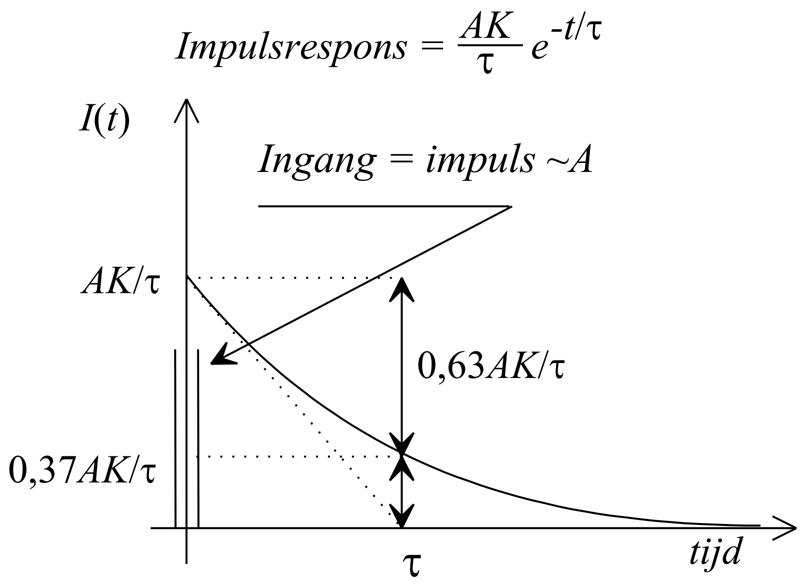
    = maat voor snelheid van systeem
  - statische versterkingsfactor *K*

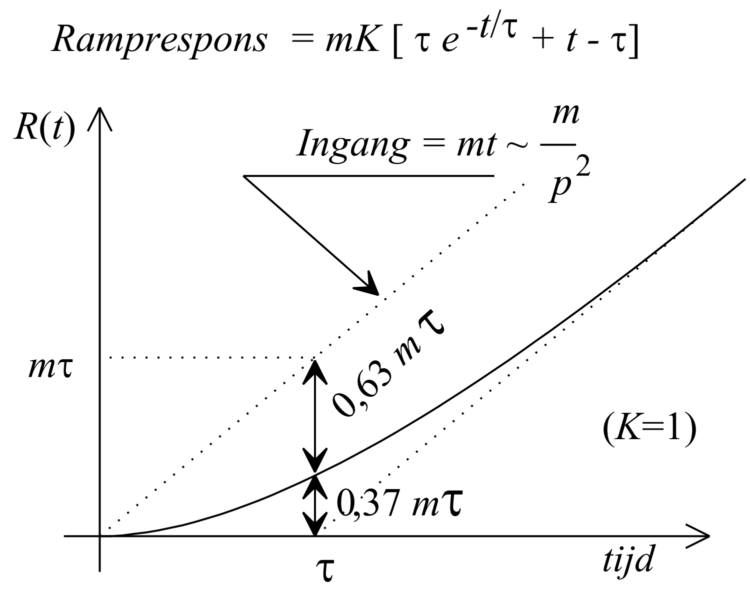
    = versterkingsfactor van ingangssignaal naar evenwichtswaarde



Systeemrespons eerste orde systeem (5)

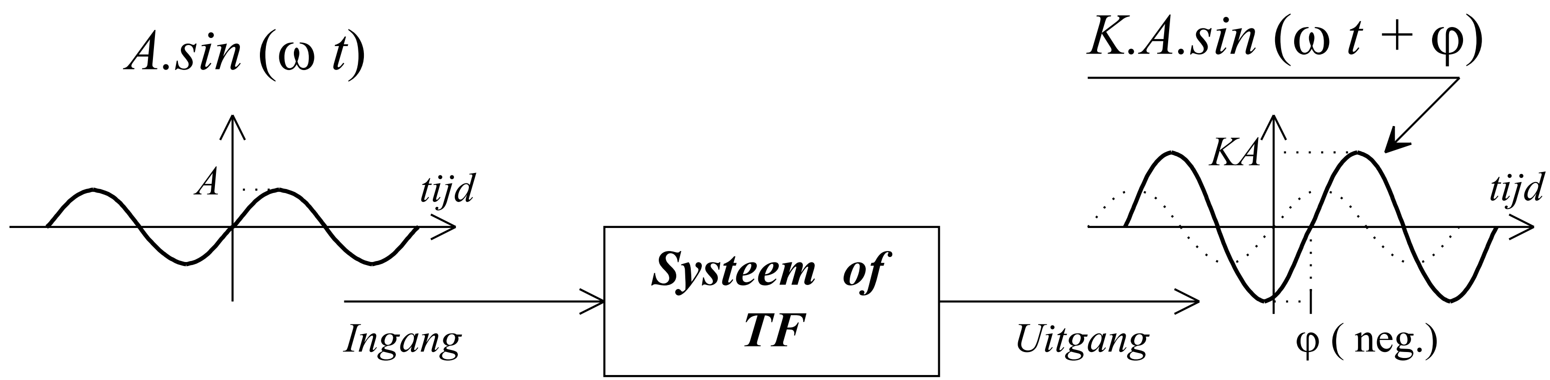
- **Tijdrespons (4)**
  - impulsrespons & amprespons





Systeemrespons eerste orde systeem (6)

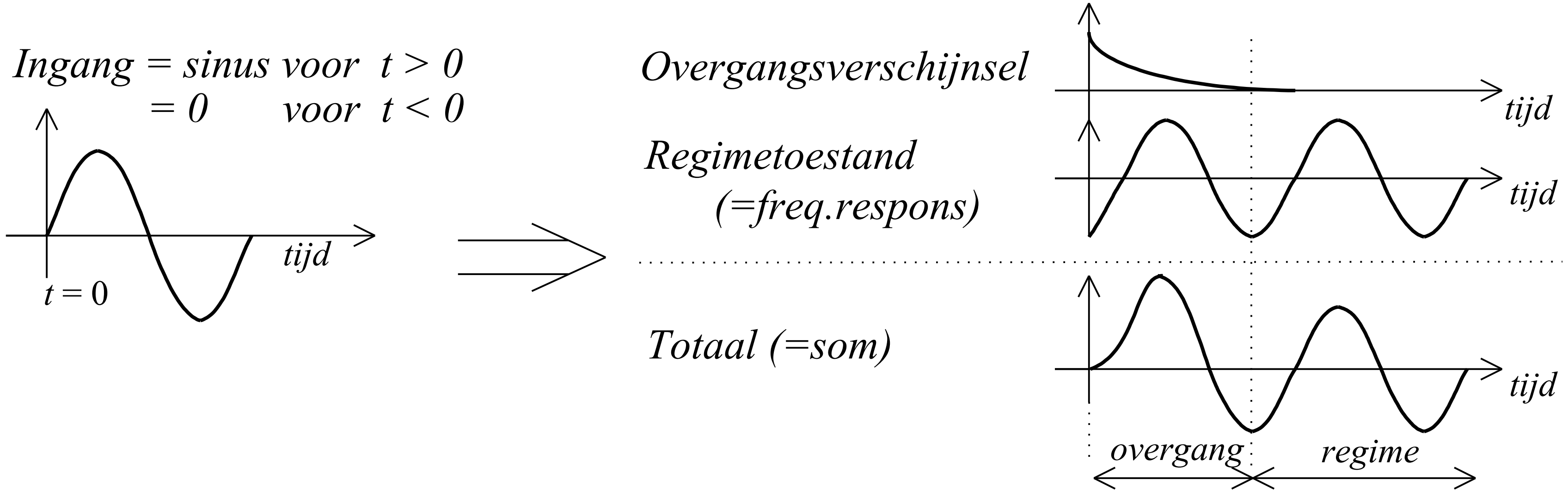
- **Frequentierespons (1)**
  - frequentierespons = systeemreactie op sinusoïdaal signaal



  - versterking of verzwakking met factor *K*
  - faseverschuiving met hoek *φ*
    - *φ* < 0: fase-naijling
    - *φ* > 0: fase-voorijling
  - frequentie-analyse = berekening *K*, *φ* voor alle *ω*

Systeemrespons eerste orde systeem (7)

- **Frequentierespons (2)**
  - onmiddellijke systeemreactie op sinusoïdaal signaal bestaat uit twee delen: overgangsverschijnsel + regimetoestand



Systeemrespons eerste orde systeem (8)

- **Frequentierespons (3)**
  - voorstelling resultaat frequentie-analyse:
    - Bode-diagram
    - Nyquist-diagram
  - berekening frequentierespons uit transfertfunctie:

$$p = j\omega$$

    - bewijs volgt uit inverse Laplace-transformatie van uitgangssignaal bij sinusoïdaal ingangssignaal [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3, Sectie 3.19]

Systeemrespons eerste orde systeem (9)

- **Frequentierespons (4)**
  - berekening uit TF voor eerste orde systeem:

$$TF_{1eorde} = G(p) = \frac{K}{1 + p\tau} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

  - magnitude/amplitude- en faserespons:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = Me^{j\varphi} \text{ met}$$

$$M = |G(j\omega)| = \left|\frac{K}{1 + j\omega\tau}\right| = \frac{K}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \angle\text{Teller} - \angle\text{Noemer} = 0 - \text{bgtg}(\omega\tau)$$

Les 2: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
  - Inleiding & Voorbeeld
  - Transferfunctie van eerste orde systeem
  - Systeemrespons van eerste orde systeem
  - Systeemdiagram van eerste orde systeem
    - Bode-diagram
    - Nyquist-diagram
    - Black- of Nichols-diagram
    - nulpunten-polen-diagram
  - Bijzondere eerste orde systemen
  - Samenvatting

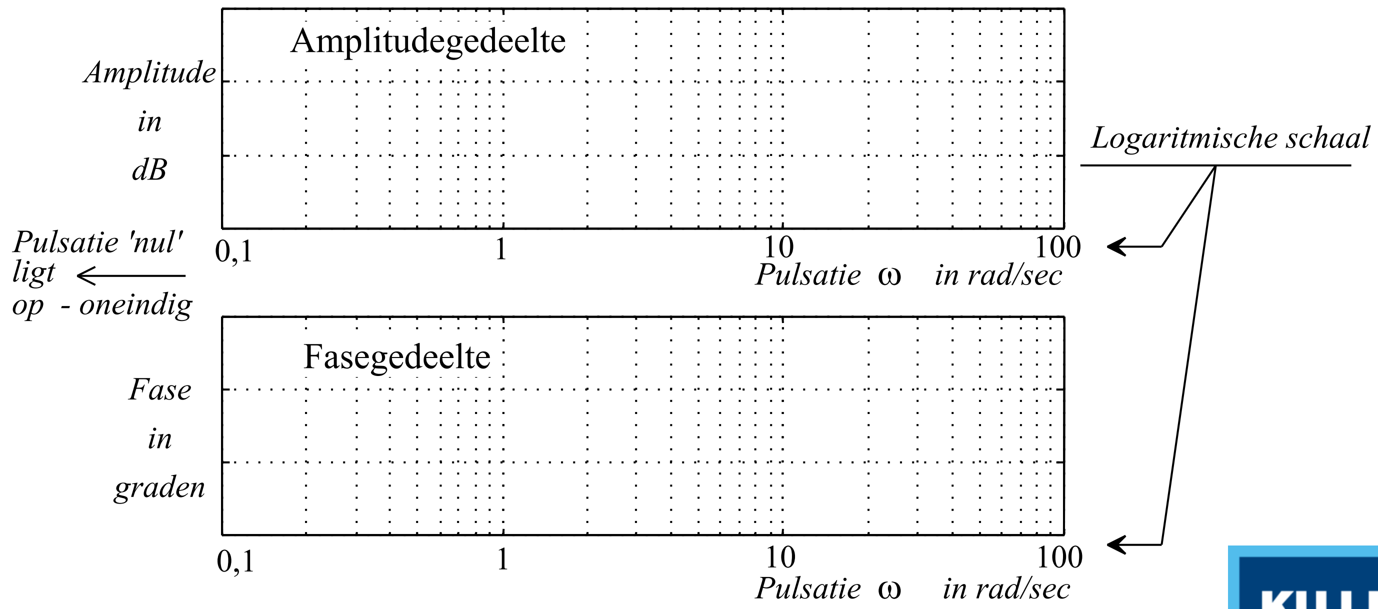
KU LEUVEN

Systeemdiagram eerste orde systeem (1)

- **Bode-diagram (1)**
  - amplitude- (in dB) en faserespons vs. pulsatie (log-schaal)

$$A = 20\log M = 20\log|G(j\omega)|$$

$$\varphi = \angle G(j\omega)$$



Systeemdiagram eerste orde systeem (2)

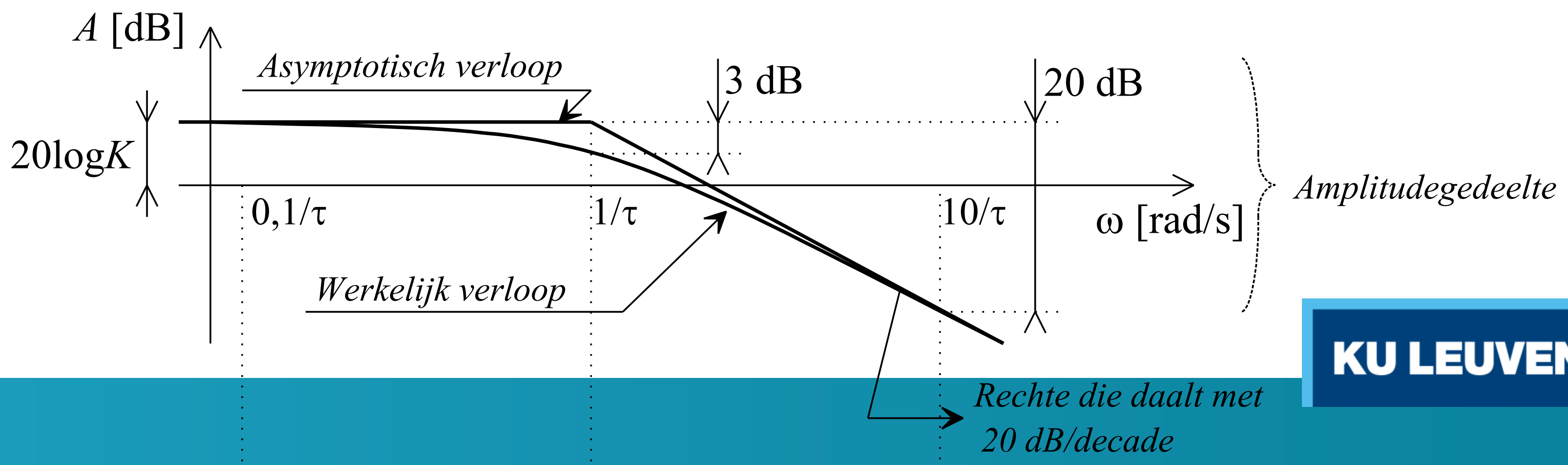
- **Bode-diagram (2)**
  - amplitudeverloop voor eerste orde systeem

$$A(\omega) = 20\log M(\omega) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right) = 20\log K - 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

- voor zeer kleine *ω*-waarden: $\omega\tau << 1 \rightarrow A = 20\log K$
- voor waarde *ω* = 1/*τ*: $A\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20\log K - 20\log\sqrt{1+1} = 20\log K - 3dB$

(breek- of afsnijpulsatie)

- voor zeer grote *ω*-waarden: $\omega\tau >> 1 \rightarrow A = 20\log K - 20\log(\omega\tau)$

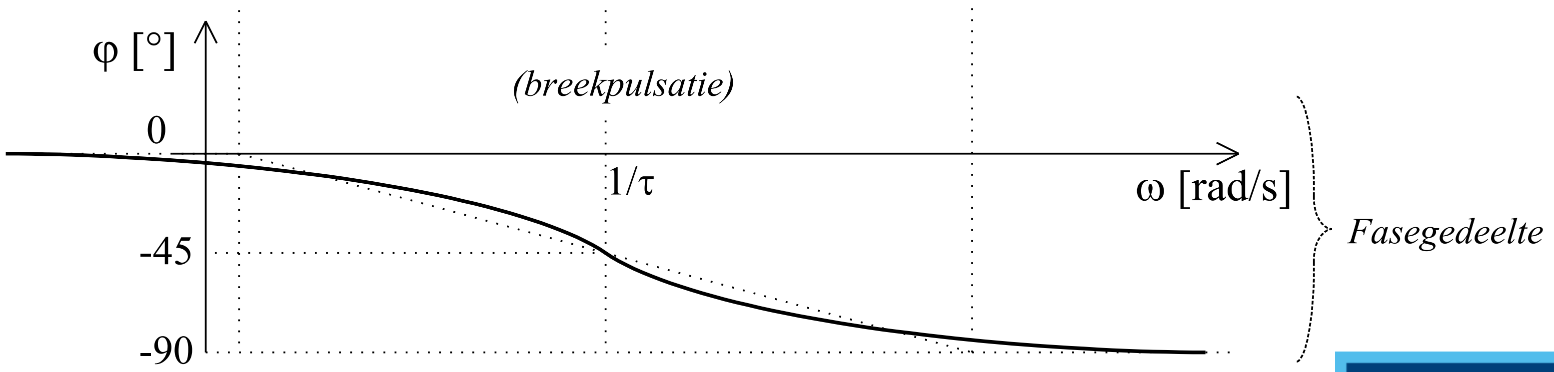


Systeemdiagram eerste orde systeem (3)

- **Bode-diagram (3)**
  - faseverloop voor eerste orde systeem

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \angle \text{Teller} - \angle \text{Noemer} = 0 - \text{bgtg}(\omega\tau)$$

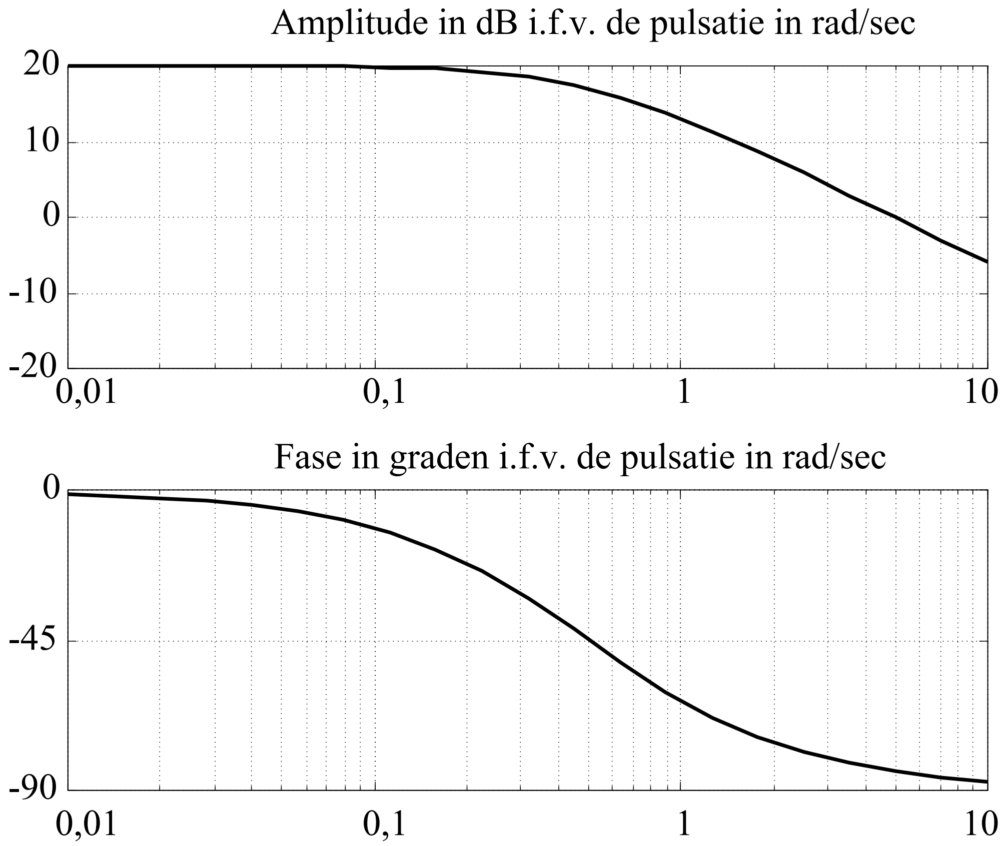
- $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\omega = 1/\tau \Rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -90^\circ$



Systeemdiagram eerste orde systeem (4)

- **Bode-diagram (4)**
  - voorbeeld:

$$G(p) = \frac{10}{2p+1}$$



interpretatie:

- laagdoorlaatfilter
- $[0,1/\tau]$ = bandbreedte

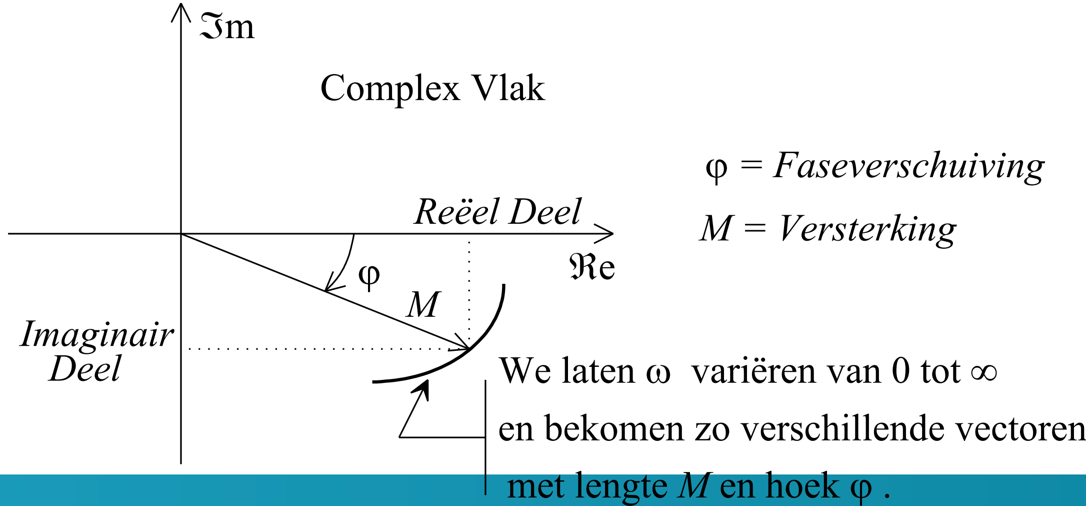
Systeemdiagram eerste orde systeem (5)

- **Nyquist-diagram (1)**
  - reëel vs. imaginair deel frequentierespons

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2}(1 - j\tau\omega)$$

$$\Re e\left[G(j\omega)\right] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \quad \text{en} \quad \Im m\left[G(j\omega)\right] = -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

  - kan worden geschetst op basis van Bode-diagram: teken voor elke pulsatie *ω* eindpunt vector met lengte *M* en hoek *φ*

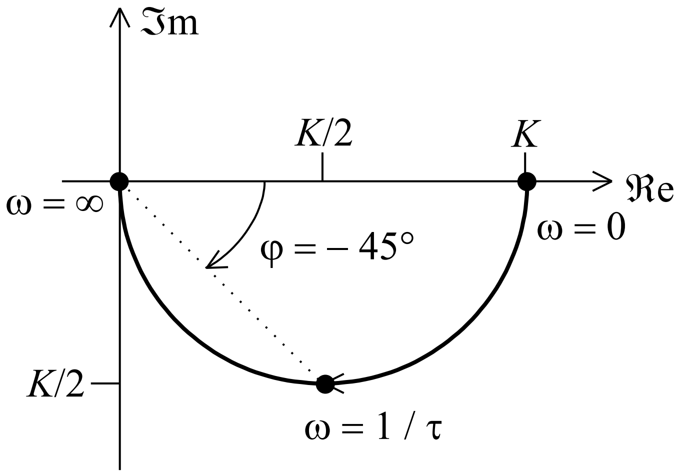


Systeemdiagram eerste orde systeem (6)

- **Nyquist-diagram (2)**
  - eerste orde systeem: enkele belangrijke punten

$$\begin{array}{llllll}
\omega = 0 & \rightarrow & \Re\mathrm{e} = K & \Im\mathrm{m} = 0 & M = K & \varphi = 0° \\
\omega = 1/\tau & \rightarrow & \Re\mathrm{e} = K/2 & \Im\mathrm{m} = -K/2 & M = K\sqrt{2}/2 & \varphi = -45° \\
\omega = \infty & \rightarrow & \Re\mathrm{e} = 0 & \Im\mathrm{m} = 0 & M = 0 & \varphi = -90°
\end{array}$$

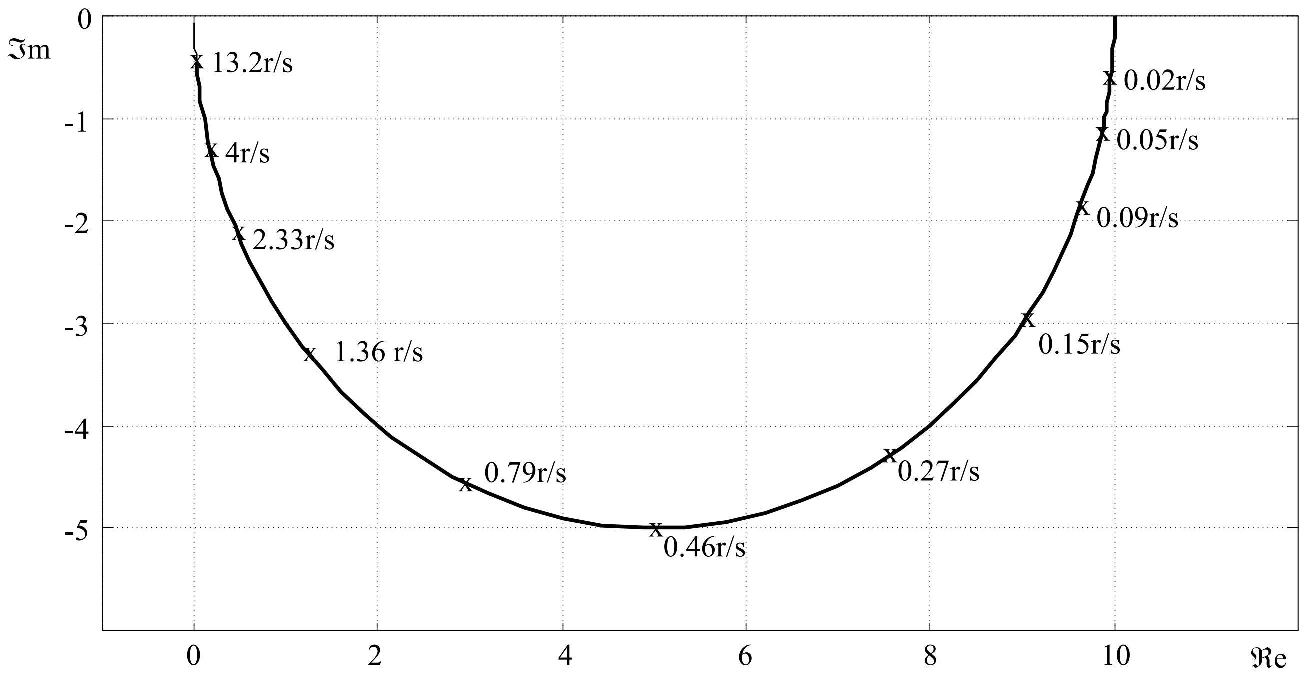
  - eerste orde systeem: Nyquist-diagram = halve cirkel



Systeemdiagram eerste orde systeem (7)

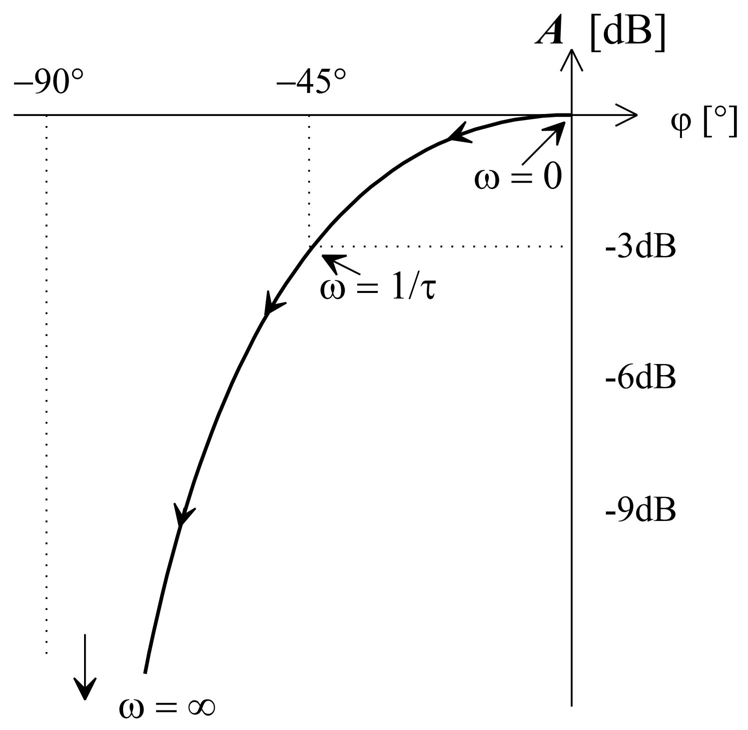
- **Nyquist-diagram (3)**
  - voorbeeld:

$$G(p) = \frac{10}{2p+1}$$



Systeemdiagram eerste orde systeem (8)

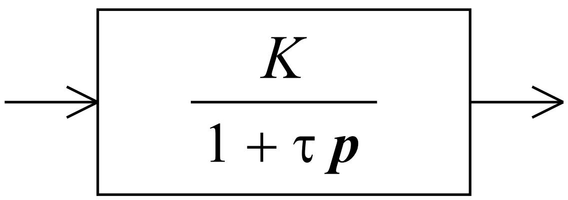
- **Black- of Nichols-diagram**
  - amplitude- (in dB) vs. faserespons
  - voorbeeld eerste orde systeem met $K = 1$

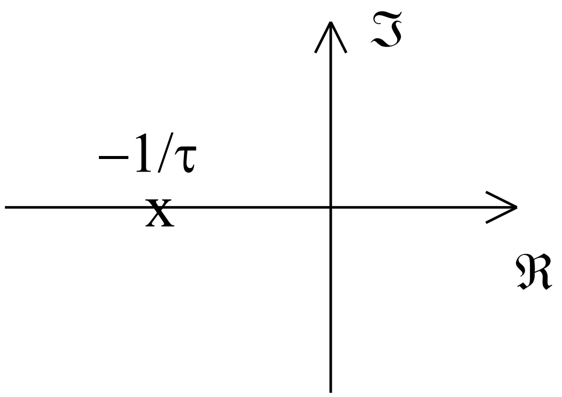


KU LEUVEN

Systeemdiagram eerste orde systeem (8)

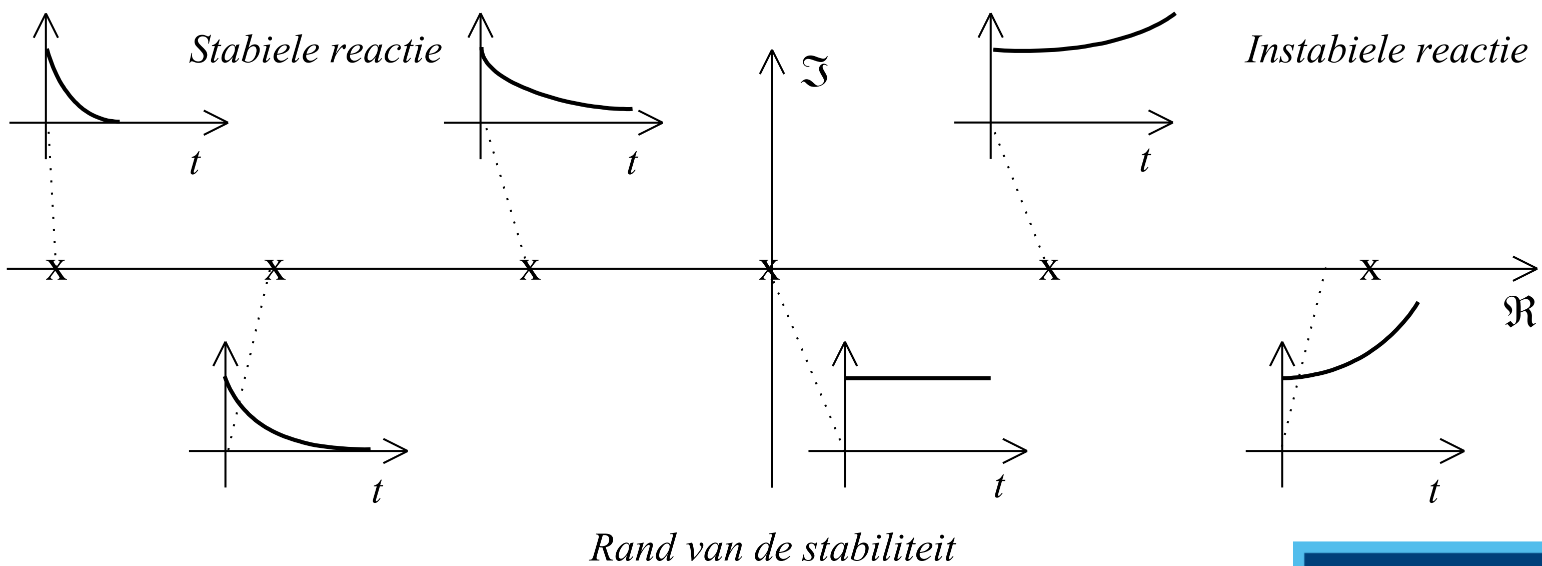
- **nulpunten-polen-diagram (1)**
  - nulpunten = wortels teller TF (o)
  - polen = wortels noemer TF (x)
  - nulpunten-polen-diagram = nulpunten/polen in complexe vlak
  - eerste orde systeem:





Systeemdiagram eerste orde systeem (9)

- **nulpunten-polen-diagram (2)**
  - ligging polen bepaalt transiënt gedrag systeem: $\dfrac{1}{p-a} \quad \rightarrow \quad e^{at}$
    - $a < 0$: stabiel systeem (transiënt gedrag sterft uit)
    - $a = 0$: marginaal stabiel systeem (transiënt gedrag blijft)
    - $a > 0$: instabiel systeem (transiënt neemt toe)



KU LEUVEN

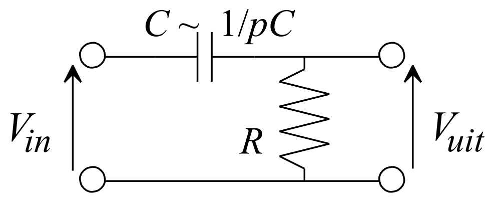
Les 2: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
  - Inleiding & Voorbeeld
  - Transferfunctie van eerste orde systeem
  - Systeemrespons van eerste orde systeem
  - Systeemdiagram van eerste orde systeem
  - Bijzondere eerste orde systemen
    - Eerste orde met differentiërende werking
    - Zuivere integrator
    - Zuivere differentiator
    - “Omgekeerd” eerste orde systeem
  - Samenvatting

KU LEUVEN

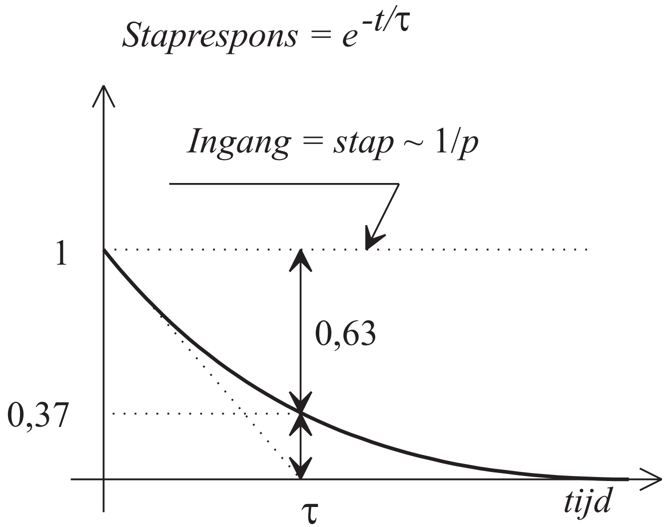
Bijzondere eerste orde systemen (1)

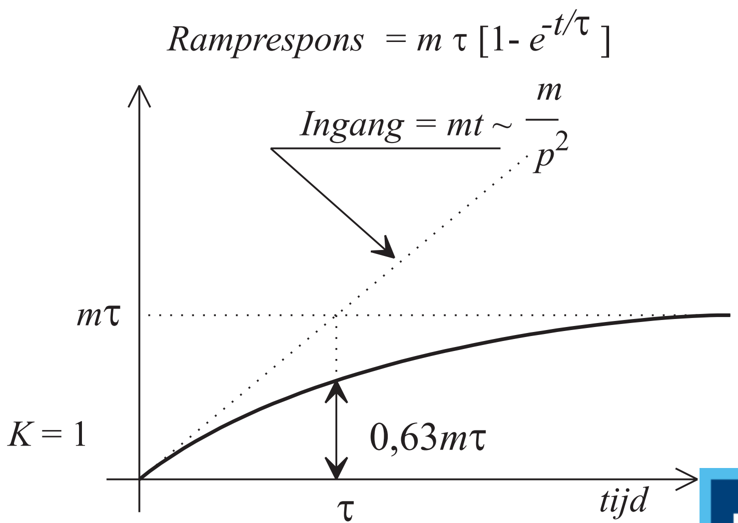
- **Eerste orde systeem met differentiërende werking (1)**
  - voorbeeld: RC-kring



$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{RCp}{RCp+1} = \frac{\tau p}{\tau p+1} \quad \text{met} \quad \tau = RC \quad [\text{sec}]$$

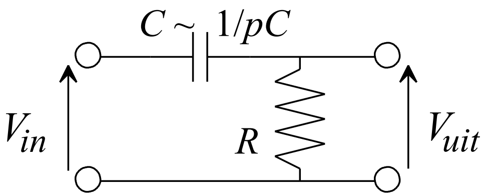
  - stap- en ramprespons





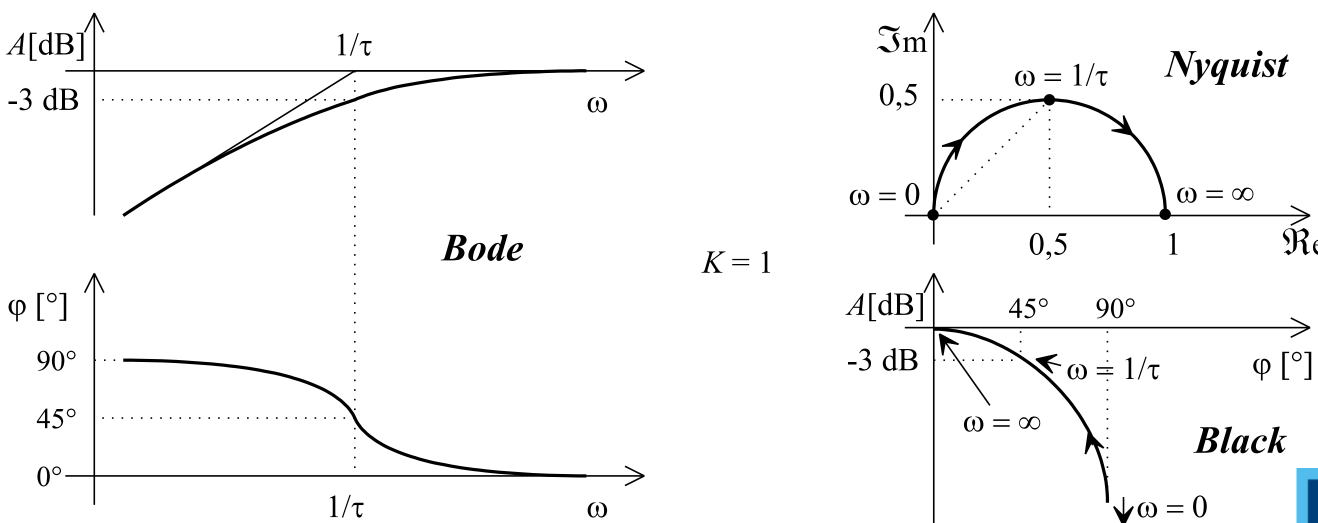
Bijzondere eerste orde systemen (2)

- **Eerste orde systeem met differentiërende werking (2)**
  - voorbeeld: RC-kring



$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{RCp}{RCp+1} = \frac{\tau p}{\tau p+1} \quad \text{met} \quad \tau = RC \ \ [\text{sec}]$$

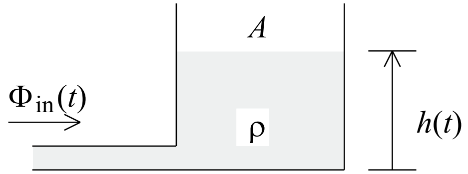
  - frequentiediagrammen



KU LEUVEN

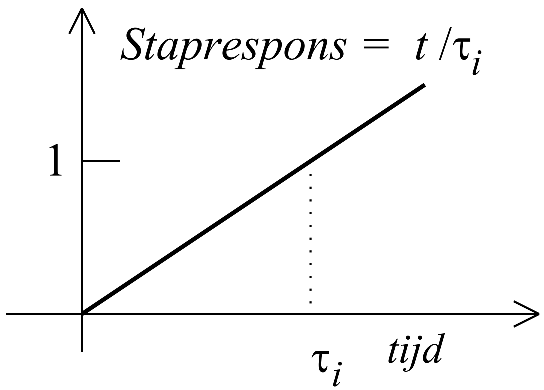
Bijzondere eerste orde systemen (3)

- **Zuivere integrator (1)**
  - voorbeeld: vloeistofreservoir

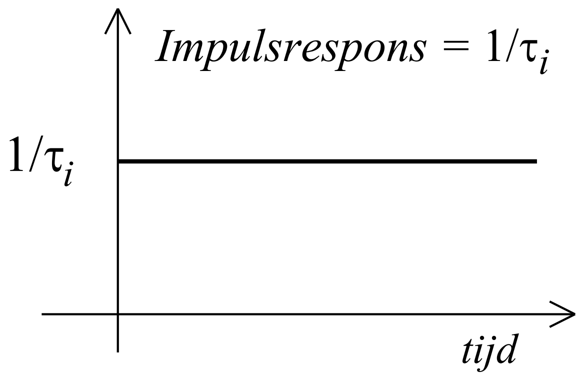


$$\Phi_{in}(t) = \rho A \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{of} \quad \frac{H(p)}{\phi_{in}(p)} = \frac{1}{\tau p} \quad \text{met} \quad \rho A = \tau \quad [\text{sec}]$$

  - stap- en impulsrespons $TF_{integrator} = \dfrac{1}{p\tau_i}$



(Ingang = stap met grootte 1)



(Ingang = Impuls met oppervlakte 1)

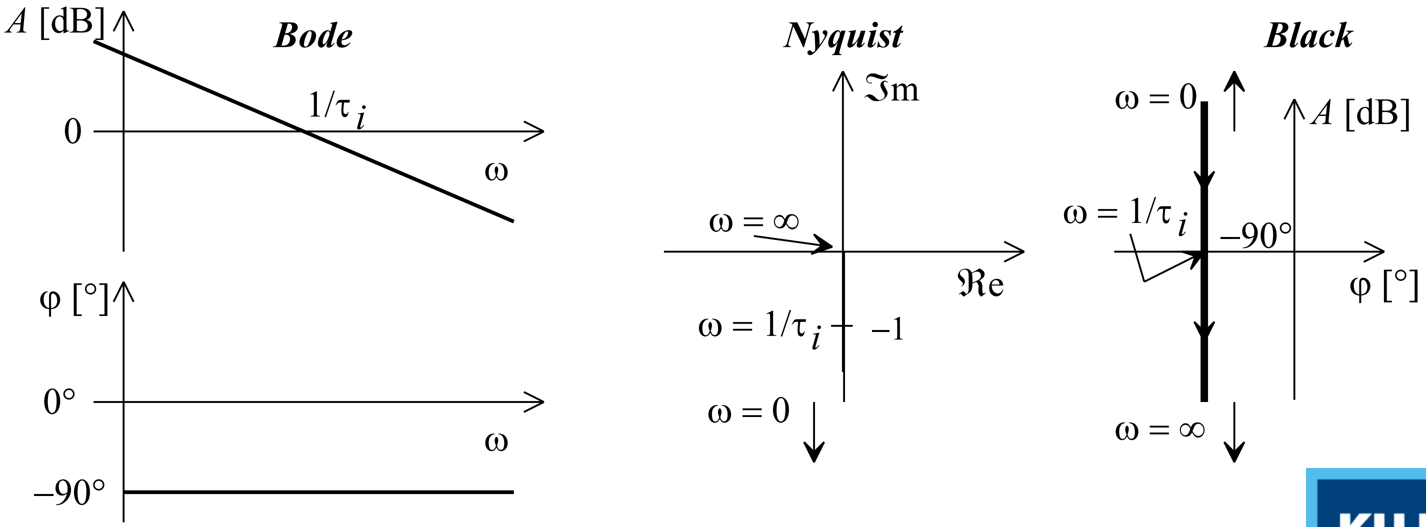
Bijzondere eerste orde systemen (4)

- **Zuivere integrator (2)**
  - frequentierespons

$$G_i(j\omega) = -j\frac{1}{\omega\tau_i} \quad \rightarrow \quad M = \frac{1}{\omega\tau_i} \quad \text{en} \quad \varphi = -90^\circ$$

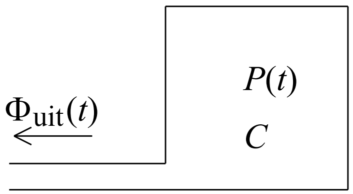
$$\rightarrow \quad \Re\mathrm{e} = 0 \quad \text{en} \quad \Im\mathrm{m} = -\frac{1}{\omega\tau_i}$$

  - frequentiediagrammen



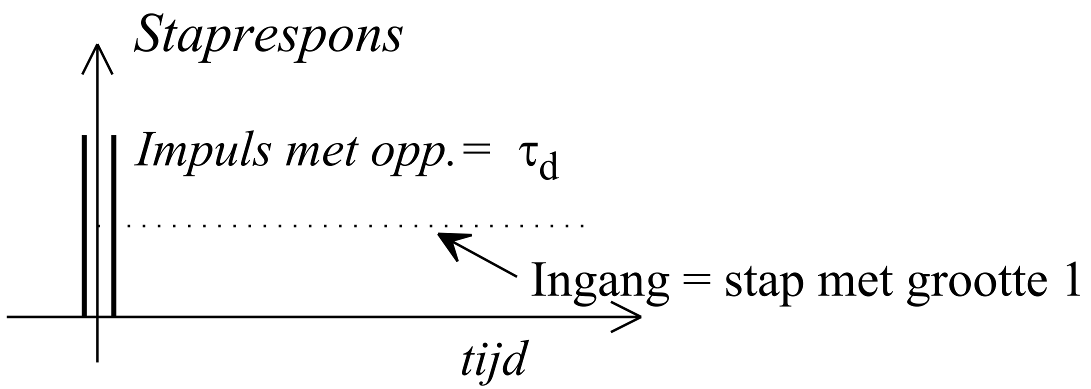
Bijzondere eerste orde systemen (5)

- **Zuivere differentiator (1)**
  - voorbeeld: drukvat



$$\Phi_{uit}(t) = C\frac{dP(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{\Phi_{uit}(p)}{P(p)} = pC = p\tau_d$$

  - staprespons $TF_{differentiator} = p\tau_d$



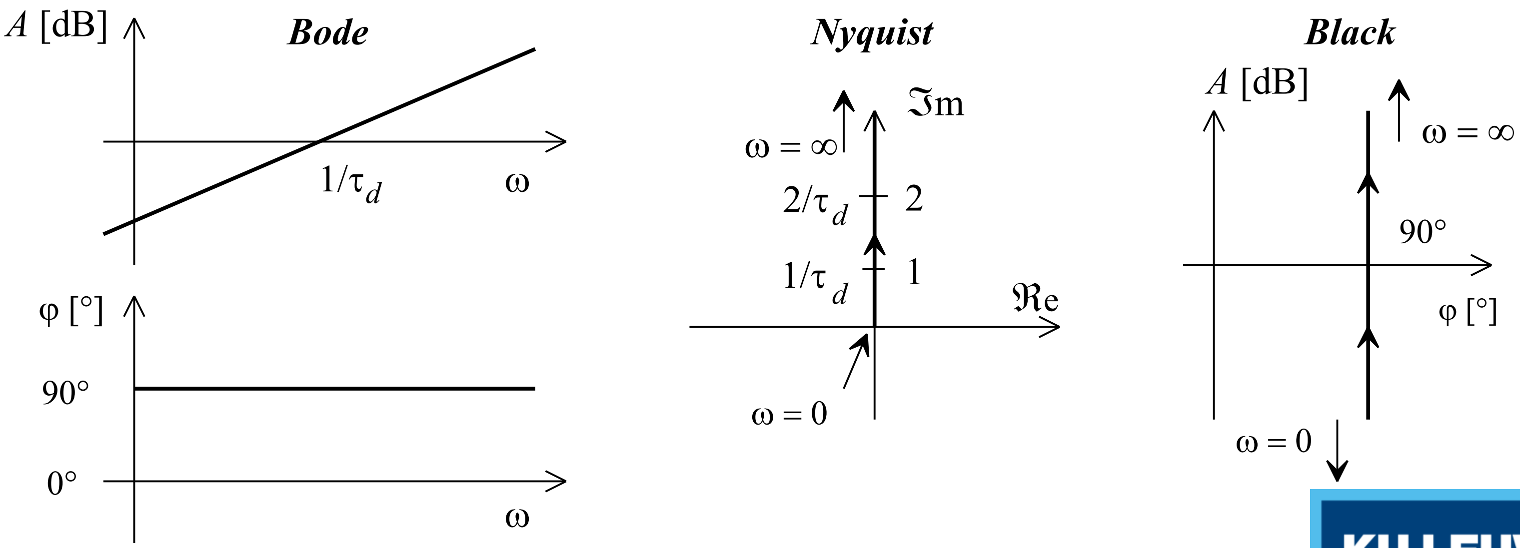
  - impulsrespons = ∞

Bijzondere eerste orde systemen (6)

- **Zuivere differentiator (2)**
  - frequentierespons

$$G_d(j\omega) = j\omega\tau_d \quad \rightarrow \quad M = \omega\tau_d \quad \text{en} \quad \varphi = 90^\circ$$
$$\rightarrow \quad \Re\mathrm{e} = 0 \quad \text{en} \quad \Im\mathrm{m} = \omega\tau_d$$

  - frequentiediagrammen



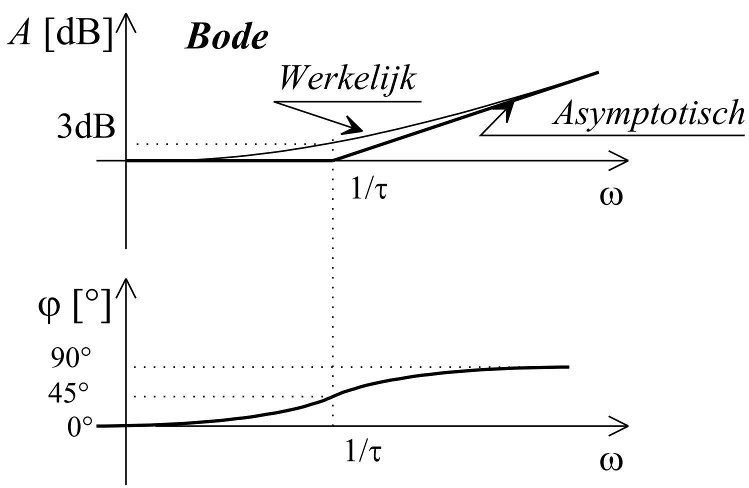
Bijzondere eerste orde systemen (7)

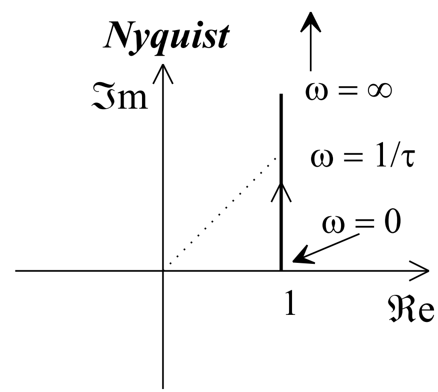
- **“Omgekeerd” eerste orde systeem:** $TF = 1 + \tau_v p$
  - “ideale PD-regelaar” (zie later)
  - komt enkel voor als onderdeel van groter systeem

$$G(j\omega) = 1 + j\tau_v\omega \quad \rightarrow \quad \Re\mathrm{e} = 1 \qquad \Im\mathrm{m} = \tau_v\omega$$

$$M = \sqrt{1 + (\tau_v\omega)^2} \qquad \varphi = \mathrm{bgtg}\,(\tau\omega)$$

  - frequentiediagrammen





Les 2: Systemen van eerste orde

- **Systemen van eerste orde** [Baeten, SYST, Hoofdstuk 3]
  - Inleiding & Voorbeeld
  - Transferfunctie van eerste orde systeem
  - Systeemrespons van eerste orde systeem
  - Systeemdiagram van eerste orde systeem
  - Bijzondere eerste orde systemen
  - Samenvatting
    - Bode-diagram van willekeurig systeem
    - Samenvatting nulpunten-polen-beeld

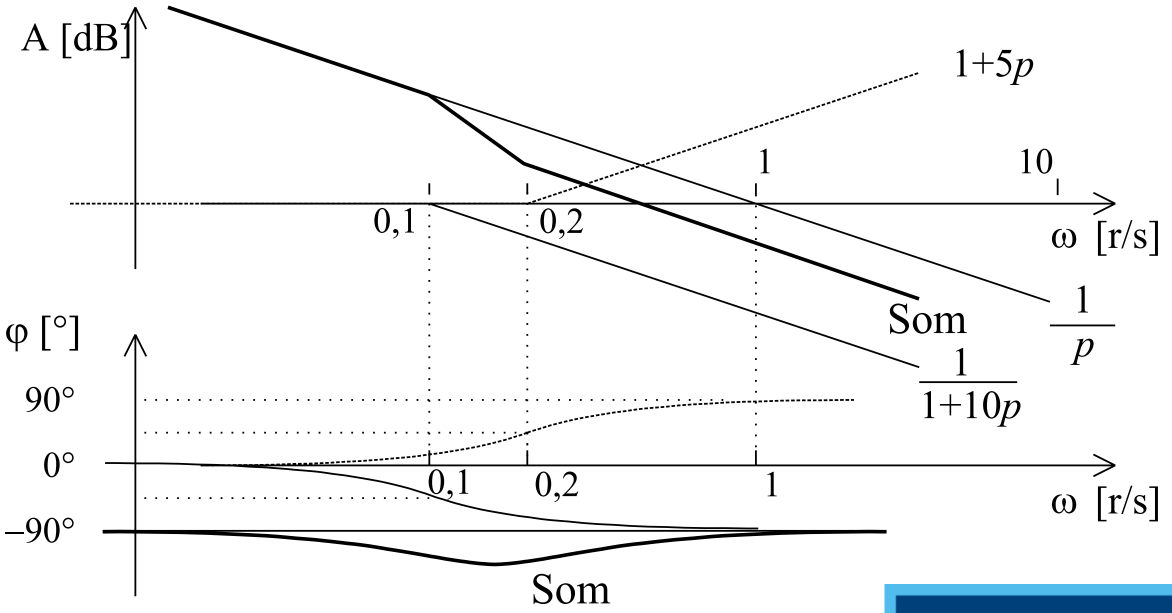
Samenvatting (1)

- **Bode-diagram van willekeurig systeem**
  - Bode-diagram systeem = som Bode-diagramma deelsystemen

$$G(p) = \frac{A}{B.C} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} 20\log G(j\omega) & = 20\log(\left|\frac{A}{B.C}\right|) & = 20\log|A| + 20\log(\left|\frac{1}{B}\right|) + 20\log(\left|\frac{1}{C}\right|) \\ \angle G(j\omega) & = \angle(\frac{A}{B.C}) & = \angle A + \angle(\frac{1}{B}) + \angle(\frac{1}{C}) \end{array}$$

  - voorbeeld:

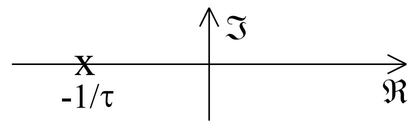
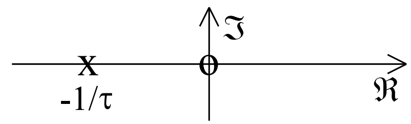
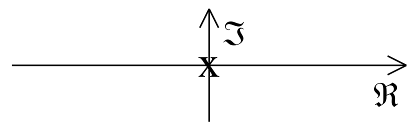
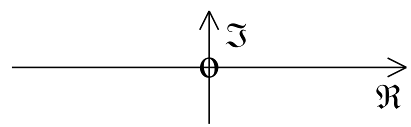
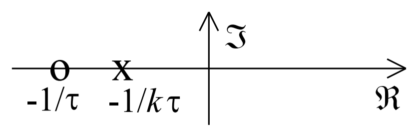
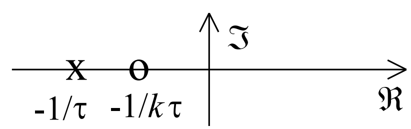
$$G(p) = \frac{(1+5p)}{p(1+10p)}$$



KU LEUVEN

Samenvatting (2)

- **Samenvatting nulpunten-polen-beeld**

	$TF =$	
Eerste orde met integrerende werking	$\dfrac{K}{1+\tau p}$	
Eerste orde met differentiërende werking	$\dfrac{K \ \tau p}{1+\tau p}$	
Zuivere integrator	$\dfrac{1}{\tau p}$	
Zuivere differentiator	τp	
\`Lag'-compensator * $k>1$	$K\dfrac{1+\tau p}{1+k\tau p}$	
\`Lead'-compensator * $k>1$	$K\dfrac{1+k\tau p}{1+\tau p}$	

(*) Zie later.